PROBLEMAS PARA

LA OLIMPIADA DE FÍSICA

Olimpiada Chiapaneca de Física

Junio, 2009

Directorio

Dr. Elí Santos Rodríguez
DIRECTOR

Dr. Sendic Estrada Jiménez
SECRETARIO ACADÉMICO

Dr. Diego Rojas Rebolledo
COORDINADOR DE LA LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

Dr. Cesar Álvarez Ochoa
COORDINADOR DE LA LICENCIATURA EN FÍSICA

Dr. Pavel Castro Villareal
DELEGADO POR CHIAPAS DE LA
OLIMPIADA MEXICANA DE FÍSICA

PROFESORES DEL CEFYMAP

Dr. Florencio Corona Vázquez

Dr. Sergio Mendoza Vázquez

Dra. María del Rosario Soler Zapata

Dra. Laura Villafuerte Altúzar

Dr. Roberto Arceo Reyes

Dr. Omar Pedraza Ortega

Dr. Gerardo Jesús Escalera Santos

ESTUDIANTES

Francisco Javier Argüello Acosta
Ivis Hernández Lázaro
José Eduardo Megchún
Edgar Luis Manuel Pérez Domínguez
Ricardo Ruiz Sánchez

Presentación

La Olimpiada Chiapaneca de Física (OChF) es una plataforma para fomentar en los estudiantes el interés por la cultura científica y en particular, despertar su vocación por la Física. En este sentido, esta olimpiada sirve como base para la difusión de los problemas básicos de las ramas más fundamentales de la Física. Más aún, al ser, la Física, el paradigma científico de la ciencia, su difusión representa una labor loable que permite cimentar en la sociedad el gusto por entender los misterios de la naturaleza.

Esta olimpiada es organizada por el Centro de Estudios en Física y Matemáticas Básicas y Aplicadas de la Universidad Autónoma de Chiapas y se realiza regularmente cada año en tres etapas. La primera etapa arranca en la última semana de febrero y consiste en un examen al interior de las escuelas de nivel medio superior, la segunda etapa, la última semana de marzo, representa un examen regional en ocho sedes ubicadas en las diferentes regiones del estado de Chiapas. Finalmente, la tercera etapa, en la última semana de mayo, consiste en un examen que se realiza en las instalaciones del CEFyMAP en la ciudad de Tuxtla Gutiérrez.

Los problemas que se presentan en este folleto aparecieron en los examenes regionales y estatales de las OChF los años 2007 y 2008. Los ejercicios que incluye este cuadernillo no son problemas rutinarios en donde se aplique una fórmula y se obtenga el resultado, pues requieren de cierta dosis de ingenio y de conocimiento preciso de las leyes de la Física. Se recomienda al lector que tenga el atrevimiento de abordar cada uno de estos problemas sin pasar directamente a revisar la solución del problema.

Agradecemos a las autoridades de la Universidad Autónoma de Chiapas (UNACH) por el financiamiento de este cuadernillo a través de la Unidad de Vinculación Docente ‘Olimpiada Estatal de Física Chiapas 2009”.

Delegación por Chiapas de las Olimpiadas de Física

Enunciado de los problemas

Problema 1. Un automovil recorre una pista rectilínea de 15 km de longitud. El tiempo que tarda es de 9 minutos. Indica la velocidad media del automovil.

a) 50 km/hr, b) 75 km/hr, c) 25 km/hr, d) 100 km/hr

Problema 2. Un cuerpo tiene una velocidad de 5 m/s en un instante dado; 2 s después tiene una velocidad de 7 m/s, ¿qué aceleración media experimenta el cuerpo?

a) 3,2 m/s^2, b) 1 m/s^2, c) 2,5 m/s^2, d) 1,5 m/s^2

Problema 3. Una canica de 20 g cae libremente desde un edificio de 8 m de altura. Si parte del reposo con que aceleración cae.

a) 13,2 m/s^2, b) 11 m/s^2, c) 9,81 m/s^2, d) 3,5 m/s^2

Problema 4. Una piedra de 1 kg se deja caer desde lo más alto de un edificio. Al mismo tiempo, otra piedra de 0,5 kg se deja caer desde una ventana ubicada 10 m más abajo. Despreciando la resistencia del aire, la distancia entre las piedras durante su caída

a) depende de las diferencias de las masas, b) disminuye, c) aumenta, d) se mantiene en 10 m, e) es de 5 m.

Problema 5. Si la Luna permaneciera en su órbita actual, pero su masa aumentara al doble, ¿cuál sería su período si T es su período actual?

a) T, b) $T/4$, c) $T/2$, d) $2T$, e) $3T$

Problema 6. Dos partículas puntuales cuyas respectivas masas son m y M tienen la misma energía cinética, el cociente de la rapidez de m entre la rapidez de M es entonces igual a:

a) $\sqrt{m/M}$, b) $\sqrt{M/m}$, c) $\sqrt{mM}$, d) $\frac{M}{m+M}$

Problema 7. Un vehículo arranca con aceleración constante y se mueve sobre una trayectoria rectilínea. Cuando alcanza una velocidad V continúa moviéndose con esa velocidad hasta que aplica los frenos y se detiene con una desaceleración de magnitud igual a la aceleración de partida. Si la distancia recorrida es D y el tiempo total de movimiento es T, el tiempo durante el cual se movió con la velocidad V es:

a) D/V, b) $T - D/V$, c) $T - 2D/V$, d) $2D/V - T$

Problema 8. ¿Qué sucede con la densidad de una barra de chocolate cuando la partes por la mitad?

a) La densidad se duplica, b) la densidad no cambia,
c) la densidad disminuye a la mitad.

Problema 9. La presión en el fondo de un vaso lleno de agua (con densidad $\rho_a = 1000$ Kg/m^3) es P. El agua se saca del vaso y éste se llena con alcohol etílico (con densidad $\rho_{al} = 806$ Kg/m^3). La presión en el fondo del vaso es:

a) menor a P, b) igual a P, c) mayor a P,
d) la presión no depende de la densidad

Problema 10. Si la temperatura de un gas ideal, medida en grados Celsius, aumentara al doble en un proceso a volumen constante entonces su presión:

a) No cambia, b) Disminuye a la mitad, c) Aumenta al doble,
d) Aumenta pero menos del doble, e) Aumenta pero mas del doble

Problema 11. Si se coloca agua dentro de un guante de plástico en un congelador, después de un tiempo largo, cuando se saque del congelador, puede decirse que el agua se:

a) gasificó, b) congeló, c) licuificó, d) no cambió de estado, e) solidificó

Problema 12. El calor es una forma de:

a) trabajo, b) medir temperatura, c) energía, d) capacidad calorífica

Problema 13. Dos partículas cargadas: una partícula alfa con dos cargas positivas y una electrón menos masivo con una sola carga negativa se atraen entre ellos. Comparando la fuerza que la partícula alfa ejerce sobre el electrón con la fuerza que el electrón ejerce sobre la partícula alfa, podemos decir que esta última es:

a) mayor, b) igual, c) menor, d) nula, e) no podemos saber

Problema 14. Conforme las partículas de la pregunta anterior se acercan entre ellas, cada una experimenta un aumento en:

a) la fuerza, b) la velocidad, c) la aceleración, d) todas las anteriores

Problema 15. Se carga una esfera de material conductor a $+50\mu C$. La carga en el centro de la esfera es igual a:

a) $+50\mu C$, b) $-50\mu C$, c) $+100\mu C$, d) $+25\mu C$, d) *cero*

Problema 16. De las siguientes frases relativas a un cuerpo en movimiento uniforme, ¿cuál no puede ser cierta? Explique por qué.

a) su velocidad puede ser cero.

b) su velocidad puede ser constante.

c) su aceleración puede ser cero.

d) su aceleración puede ser constante.

e) su velocidad puede ser variable.

Problema 17. Sea un tiro parabólico. Haz un esquema de:

a) la trayectoria.

b) las componentes horizontal y vertical de la velocidad en función del tiempo.

c) las componentes horizontal y vertical de la posición en función del tiempo.

Problema 18. Una piedra lanzada verticalmente hacia arriba tiene velocidad nula cuando alcanza su altura máxima, pero ¿cuánto vale la aceleración en dicho punto?

Problema 19. Dejamos caer una piedra desde lo alto de una torre. Medio segundo después dejamos caer una segunda piedra. A medida que las piedras caen, ¿qué pasa con la separación entre ellas? Argumente su respuesta.

Problema 20. Indica las fuerzas que actúan sobre un cuerpo situado en las proximidades de la superficie terrestre cuando:

a) asciende por el aire, después de lanzarlo verticalmente hacia arriba,

b) desciende por el aire, después de dejarlo caer libremente.

c) describe una parábola en el aire, tras lanzarlo oblicuamente.

d) se desliza con velocidad constante por un plano horizontal sin rozamiento.

e) está subiendo por un plano inclinado con rozamiento, tras darle un empujón inicial.

f) gira sobre un plano horizontal sin rozamiento, atado con una cuerda a un punto fijo.

(No consideres el rozamiento con el aire).

Problema 21. Se introduce una bolita por un tubo espiral horizontal que está apoyado sobre una mesa. ¿Qué trayectoria describe la bolita cuando sale por el otro extremo y va rodando sobre la mesa?

Problema 22. Disponemos dos piedras de forma que una de ellas está situada un metro por encima de la otra. Si, simultáneamente, las dejamos caer libremente, ¿qué pasa con la separación entre ellas?

Problema 23. El momento lineal de un cuerpo es el producto de su masa por su velocidad. Por ejemplo, si la velocidad de una bala de cañón aumenta al doble, entonces, su momento lineal aumenta al doble. Si en lugar de eso, lo que aumenta al doble es la masa, entonces, también su momento lineal aumenta al doble. Supongamos, sin embargo, que la masa de la bala de cañón aumenta al doble y su velocidad también aumenta al doble. Entonces, ¿cómo es ahora su momento lineal?

Problema 24. Dos trenes abandonan sus respectivas estaciones, que se encuentran separadas $80km$, y viajan en línea recta, acercándose el uno hacia el otro a lo largo de la misma vía. La velocidad de un tren es de $80km/h$, mientras que la del otro es de $160km/h$. Un insecto que vuela muy rápido parte del tren más lento y se dirige hacia el tren más rápido, a una velocidad de $240km/h$; cuando llega al segundo tren, da rápidamente la vuelta y regresa hacia el primero, continuando con estas maniobras hasta que queda aplastado entre los dos trenes, cuando éstos chocan entre sí. Calcula la distancia que ha recorrido el infortunado insecto antes de quedar aplastado entre los dos trenes.

Problema 25. Lanzamos desde el suelo hacia arriba una bola de masa $2m$, con velocidad inicial v_0. Otra bola, de masa m, está a una altura h sobre el suelo, sostenida del techo por un cable fino. La segunda bola está situada justo sobre la primera bola, de forma que la que lanzamos desde el suelo choca con la que está suspendida del techo. (a) Suponiendo que la colisión es elástica, obtén, en función de v_0 , h y g, una expresión para la altura sobre el suelo a la que llegará la segunda bola después del choque. (b) Supón ahora que ambas bolas son de arcilla y que tras la colisión, se unen formando una única bola. ¿A qué altura llegarán las dos bolas juntas?

Problema 26. En un reproductor de CD el disco no gira a una velocidad constante, sino que la velocidad angular está determinada por un circuito de control, de forma que la lectura de los registros del disco se haga a velocidad constante. El láser que se emplea para leer los datos del disco comienza a leer desde un radio interior de $2{,}5cm$ y continúa leyendo hasta llegar a un radio exterior de $5{,}8cm$. Si al principio el disco gira a $490rev/min$, ¿cuál será su velocidad angular al final?

Problema 27. En el juicio de un accidente, un policía hace la siguiente reconstrución del suceso: Un coche deportivo, de $1000kg$ de masa, chocó con una camioneta, de $1500kg$ de masa, que estaba estacionada. A partir de la marca dejada por los neumáticos, se pudo estimar que la velocidad de la camioneta inmediatamente después de la colisión era de $21{,}6m/s$, formando un ángulo de $33{,}7^o$ con la dirección de la carretera. El coche deportivo dejó una marca formando un ángulo de 60^o con la carretera, pero no frenó, abandonando el lugar del accidente bastante dañado. A partir de estos datos, ¿puede un experto determinar a qué velocidad iba el coche deportivo?

Problema 28. ¿Puede un objeto estar más caliente que otro si tienen la misma temperatura? Explique su respuesta.

Problema 29. Un trozo de hielo y un termómetro más caliente se hallan suspendidos en un recinto aislado y al vacío de modo que no estén en contacto. ¿Por qué la lectura del termómetro disminuye con el tiempo?

Problema 30. Se descubre que el peso de una bolsa plana, delgada y vacía no se altera cuando se llena de aire. ¿Por qué?

Problema 31. Escriba las transformaciones entre las diferentes escalas de temperatura (Farenheit, Celcius, Kelvin). ¿Alguna de ellas destaca como la "escala de la naturaleza"? Explique su respuesta.

Problema 32. Dos tiras, una de hierro y otra de zinc, están unidas por remaches una al lado de la otra (por el lado más largo), formando una barra recta que se pandea al ser calentada. ¿Por qué queda el hierro dentro de la curva?

Problema 33. ¿en que temperatura coinciden las escalas Farenheit y Celcius?

Problema 34. ¿Como se define presión?

Problema 35. En termodinámica la relación de ciertas cantidades físicas que nos permiten caracterizar al sistema se le llama ecuación de estado, que nos define alguna de las variables en términos de las otras. Para un gas estas cantidades son la presión el volumen y la temperatura. Dentro de los gases existe una abstracción llamada gas ideal que tiene un comportamiento característico al considerar como constituyentes del gas partículas puntuales. La ecuación que caracteriza al gas ideal o su ecuación de estado es:

$$pV = NkT,$$

dónde p representa la presión y ésta es entendida a nivel microscópico como el constante golpeteo de las partículas con las paredes del recipiente que las contiene. N es el número de partículas o moléculas contenidas en el recipiente, T es la temperatura expresada en kelvins, y k es una constante denominada *constante de Boltzmann*, cuyo valor es

$$k = 1{,}38 \times 10^{-23} J/K.$$

Algunas veces es conveniente expresar la ecuación del gas ideal no en términos del número de moléculas, sino en términos del número de moles n. Las dos miden la cantidad del gas y se relaciona por medio de

$$N = nN_A,$$

donde N_A es una constante llamada *número de Avogadro* que es el número de moléculas contenidas en un mol de sustancia. Su valor es

$$N_A = 6{,}02 \times 10^{23} moleculas/mol.$$

Así la ecuación del gas ideal se escribe como

$$pV = nRT$$

donde R es una constante denominada *constante molar de los gases o constante universal de los gases*. Su valor es

$$R = 8{,}31 J/mol \cdot K.$$

a) Calcule el volumen ocupado por un mol de un gas ideal en condiciones normales, es decir con presión de 1 atm($= 1{,}01 \times 10^5$ Pa) y una temperatura de 0^oC (273 K).

b) Demuestre que el número de moléculas por centímetro cúbico es $2{,}68 \times 10^{19}$ en tales condiciones.

Problema 36. El mejor vacio que puede conseguirse en laboratorio corresponde a una presión aproximada de 10^{-18}atm o $1{,}01 \times 10^{-13}$Pa. ¿Cuantas moléculas hay por centímetro cúbico en él a 22^oC?

Problema 37. Dos recipientes de 1.22 l y 3.18 l (litros) de volumen contiene gas kripton y están conectados por un tubo delgado. Al inicio tiene la misma temperatura, 16^oC, y presión de 1.44 atm. El recipiente más grande se calienta entonces a 108^oC y el más pequeño permanece a 16^oC. Calcule la presión final.

Problema 38. De la ecuación del gas ideal se desprenden las leyes de los gases que son, la **Ley de Boyle** (ley de Boyle Mariotte), para procesos a temperatura constante

$$PV = cte \qquad o \qquad P_i V_i = P_f V_f.$$

La **Ley de Charles** (Gay-Lussac-Charles) que es para procesos en que se mantiene la presión constante

$$\frac{V}{T} = cte \qquad o \qquad \frac{V_i}{T_i} = \frac{V_f}{T_f}.$$

La **Ley de Gay-Lussac** que es para procesos a Volumen constante

$$\frac{P}{T} = cte \qquad o \qquad \frac{P_i}{T_i} = \frac{P_f}{T_f}.$$

La **Ley de Avogadro** que dice *para las mismas presiones y temperaturas en volúmenes iguales de cualquier gas se tiene el mismo número de moléculas.* La **Ley de Dalton** que nos dice que *la presión de la mezcla de gases es igual a la suma de las presiones parciales de sus componentes.* Analice cada una de estas leyes utilizando la ecuación de estado del gas ideal.

Problema 39. Calcular la altura necesaria que hay que subir encima de la superficie de la Tierra para que la aceleración de la gravedad sea de 7 m/s^2. Recuerde que la masa de la Tierra es $M_T = 5{,}97 \times 10^{24}$ Kg, el radio de la Tierra es $R_T = 6{,}637 \times 10^6$ m y la constante universal de gravitación es $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ Nm^2/Kg^2

Problema 40. Un objeto de 3 Kg en reposo se deja libre a una altura de 5 m. sobre una rampa curva y sin rozamiento, como se muestra en la figura 1. Al pie de la rampa existe un resorte cuya constante de rigidez es de 400 N/m. El objeto se desliza por la rampa y llega a chocar contra el resorte, comprimiéndolo una distancia x antes de que quede momentáneamente en reposo. Determine el valor de x y la velocidad con la cuál llega al resorte.

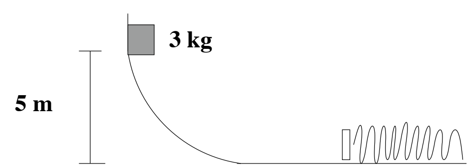

Figura 1:

Problema 41. Un globo de 40 m de diámetro está lleno con helio. ¿Qué masa total puede levantar el globo en un aire de densidad igual a 0,9 Kg/m^3? (La densidad del helio es de 0,178 Kg/m^3).

Problema 42. Una pequeña luna de masa m y radio a orbita alrededor de un planeta de masa M describiendo un círculo de radio r y manteniendo siempre la misma cara hacia el planeta . Suponiendo que $r >> a$, demostrar que si la luna se acerca al planeta una distancia menor que $r_c = a\,(3M/m)^{1/3}$, una roca suelta sobre la superficie de la luna se elevará (en relación a la superficie lunar) por efecto de la atracción gravitatoria del planeta.

Problema 43. Una plataforma circular gira con velocidad angular constante igual a $\omega = 6/s$ (seis vueltas en un segundo) como se indica en la figura 2. Desde una altura h por encima de la plataforma se suelta una bolita de plastilina, la cual golpea la plataforma a una distancia $\frac{R}{2}$ de su centro, donde R es el radio de la plataforma circular. Mientras la bolita cae, la plataforma da $\frac{3}{4}$ de una vuelta. ¿Cuál es la altura h?

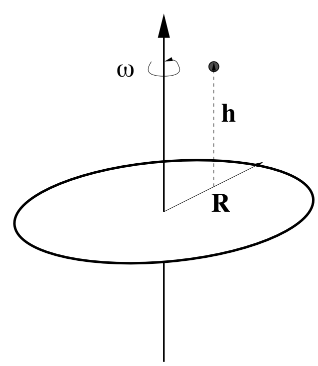

Figura 2:

Problema 44. Una esfera de peso 10 N cuelga del techo mediante un hilo ligero y se mantiene de la vertical a un ángulo ϕ jalándola con una fuerza de 3 N como se indica en la figura 3. ¿Cuánto vale el ángulo ϕ?

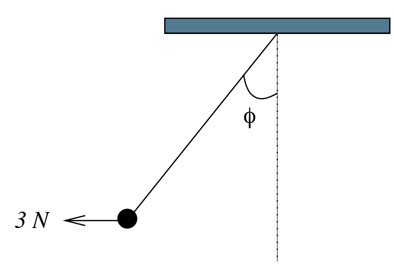

Figura 3:

Problema 45. Un recipiente cilíndrico de 20 cm de diámetro flota en el agua emergiendo

10 cm de la superficie, cuando de su fondo cuelga un bloque de hierro de 10 kg. Si el bloque de hierro se coloca ahora dentro del recipiente. ¿Cúal será la altura que emerge? siendo 7,8 gr/cm^3 la densidad del hierro. Ver figura 4. (Nota: Desprecie la masa del cilindro).

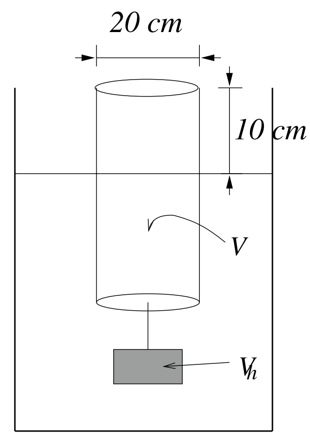

Figura 4:

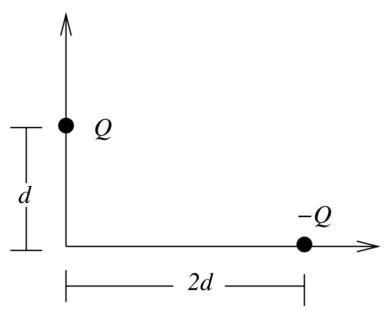

Figura 5:

Problema 46. En una varilla no conductora doblada en ángulo recto se hallan dos esferas pequeñas (atravesadas por la varilla) que pueden desplazarse sin fricción a lo largo de ésta. Las esferas poseen cada una masa m y cargas Q y $-Q$ respectivamente. En el momento inicial las esferas se encuentran en reposo y están a las distancias d y $2d$ del ángulo recto. Si las esferas se liberan, ¿Cuál es la velocidad de cada una de las esferas cuando la distancia de separación de las esferas es d? Despreciar el efecto de la gravedad. Ver figura 5.

Problema 47. En un botellón habían 10 kg de un gas noble a una presión de 10^7 N/m^2. Al extraer una cierta cantidad de gas la presión se redujo a $2{,}5 \times 10^6$ N/m^2. Determine la cantidad de gas extraído bajo la consideración de que la temperatura permanece constante.

Problema 48. Desde una altura de 5,0 m se deja caer un objeto de 1 kg de masa. Antes de llegar al piso el objeto choca con un resorte que tiene por longitud 1,5 m y por constante elástica $k = 50$ N/m (Ver figura 6). El objeto comprime al resorte hasta quedar en reposo. ¿ Cuál es la compresión que sufre el resorte?

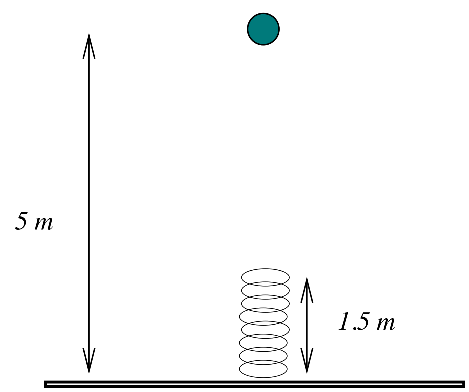

Figura 6:

Problema 49. Un protón es acelerado desde el reposo por un campo electrostático cuya diferencia de potencial es $V = 2 \times 10^6$ Voltios. Una vez acelerado penetra en una región en la que existe un campo magnético uniforme perpendicular a la trayectoria del electrón y de valor $B = 0{,}2$ Teslas. Determinar

a. El radio de la órbita.

b. La velocidad del protón en ella.

c. El tiempo que tarda el protón en describir una órbita completa.

Problema 50. Considere los cuerpos B y C de masa m y M, respectivamente (ver figura 7). Inicialmente estos cuerpos están en reposo y separados por una distancia. El cuerpo

A se mueve a una velocidad V_0 a lo largo de la línea que une a los tres cuerpos y hacía donde se encuentran los cuerpos B y C. Suponiendo que las colisiones son elásticas y frontales,

a. Demuestre que sí $M \leq m$, entonces habrá dos colisiones. Encuentre las velocidades finales de cada uno de los cuerpos.

b. Demuestre que sí $M > m$, entonces habrá tres colisiones. Encuentre las velocidades finales de cada uno de los cuerpos.

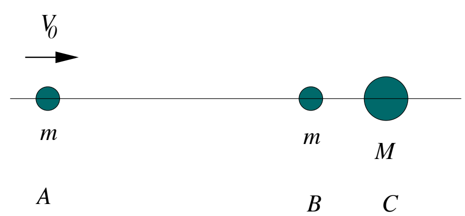

Figura 7:

Problema 51. Una pelota se arroja hacia arriba, desde una ventana que está ubicada a 10 m del suelo con una velocidad de 10 m/s

- ¿ Cuál será la altura la máxima?
- ¿ En qué tiempo alcanza la altura máxima?
- ¿ En qué tiempo tocará el suelo?

Problema 52. Un bloque de madera flota en el agua con 2/3 de su volumen sumergido. En el aceite 9/10 de su volumen sumergido. Halle la densidad de la madera y la densidad del aceite. (La densidad del agua es 1 gr/cm^3)

Problema 53. El carrito (sin fricción) de una montaña rusa parte del punto A en la figura 8 a la velocidad v_0. ¿Cuál será la velocidad del carrito en el punto B, y en el punto C? Supongase que el carrito puede ser considerado como una partícula y que siempre permanece sobre la vía.

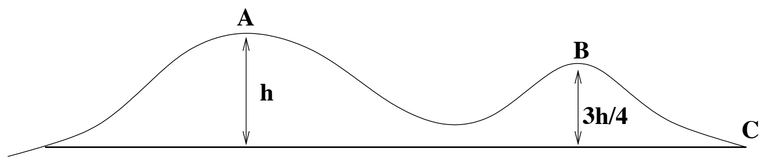

Figura 8:

Problema 54. Tres partículas cargadas se encuentran en una línea recta y están separadas por una distancia d como se muestra en la figura 9. Las cargas q_1 y q_2 se mantienen fijas. La carga q_3 está en equilibrio bajo la acción de las fuerzas eléctricas. Halle q_1 en términos de q_2.

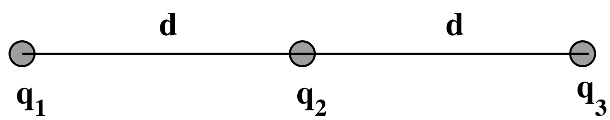

Figura 9:

Problema 55. De un tren en movimiento se desprende un vagón. El tren continúa moviendose con la misma velocidad. ¿Cuál es la relación entre las distancias recorridas por el tren y el vagón desde el momento de la separación hasta la detención del vagón? Considerar que el vagón se detiene con aceleración constante.

Problema 56. Dos conductores conectados en serie poseen una resistencia cuatro veces mayor que al conectarlos en paralelo. Encontrar cuántas veces es mayor la resistencia de uno con respecto al otro.

Problema 57. ¿A qué velocidad debe ser arrojada una pelota verticalmente hacia arriba con objeto de que llegue a una altura máxima H? ¿Cuánto tiempo estuvo en el aire?

Problema 58. Un tubo de radio R conduce agua que fluye a velocidad constante v_0 ¿Cuánto tiempo le tomará descargar el agua en un recipiente de volumen V? (Exprese su respuesta en términos de R, v_0 y V).

Problema 59. Un aro de radio R está fijo verticalmente en el suelo. De la cumbre del aro desliza sin rozamiento un cuerpo (ver figura 10). ¿A qué ángulo θ respecto a la vertical el cuerpo se separa del aro?

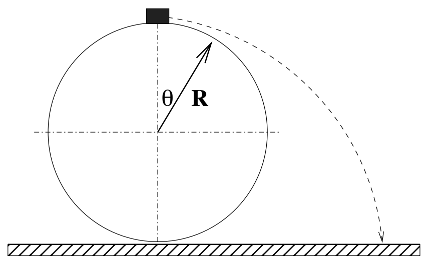

Figura 10:

Problema 60. Dos bolas con la misma carga Q y masa m están suspendidas del mismo punto por cuerdas de ℓ de largo. Las bolas quedan en reposo a una distancia de L, como se muestra en la figura 14. ¿ Cuál es la magnitud de la carga en cada bola? ¿ Cuál es la fuerza de tensión en cada cuerda?

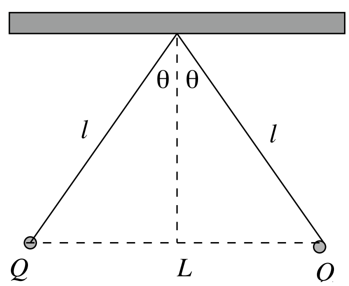

Figura 11:

Problema 61. Cuatro cargas iguales de valor q cada una, están situadas en los vértices de un cuadrado. ¿Cuál será la carga Q de signo contrario que es necesario colocar en el centro del cuadrado para que todo el sistema de cargas se encuentre en equilibrio?

Soluciones de los problemas

Solución 1. d

Solución 2. b

Solución 3. c

Solución 4. d

Solución 5. a

Solución 6. b

Solución 7. d

Solución 8. b

Solución 9. a

Solución 10. c

Solución 11. e

Solución 12. c

Solución 13. b

Solución 14. a

Solución 15. d

Solución 16. Sí un cuerpo se encuentra en movimiento uniforme entonces el cuerpo se encuentra en reposo o se mueve en línea recta con velocidad constante. Así que las frases que no pueden ser ciertas corresponden con los incisos *d*) y *e*). Incluso, el enunciado *d*) que a la letra dice *su aceleración puede ser constante* es sólo un caso particular del enunciado correspondiente al inciso *e*) puesto que si un cuerpo se mueve con aceleración constante, la velocidad varía con el tiempo. El inciso *e*) es más general que el inciso *d*) puesto que éste inciso incluye la posibilidad de que no sólo varíe la velocidad en el tiempo sino también la aceleración.

Solución 17. Las componentes horizontal y vertical como función del tiempo en el tiro parabólico son (ver figura (12))

$$\begin{aligned} x &= v_{0x}t, \\ y &= v_{0y}t - \frac{g}{2}t^2. \end{aligned}$$

De estas ecuaciones podemos despejar el tiempo t y obtenemos una ecuación para y en

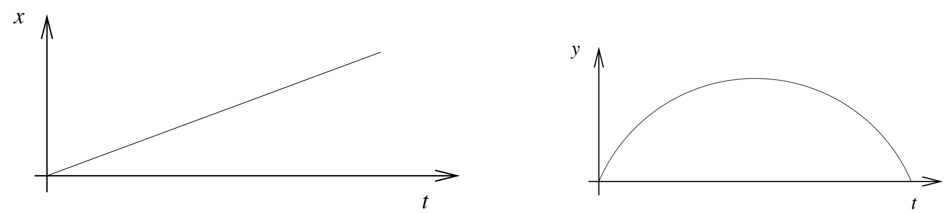

Figura 12: Posición.

términos de x, es decir,

$$y = \tan\theta \; x - \frac{g}{2v_{0x}^2}x^2,$$

donde, $\tan\theta = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}$ y θ es el ángulo al que es lanzado el objeto. Esta ecuación representa

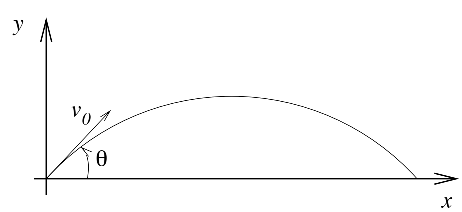

Figura 13: Trayectoria.

una parábola con concavidad hacia abajo asi como se muestra en la figura (13). Las velocidades en función del tiempo son (ver figura (14))

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0x}, \\ v_y &= v_{0y} - gt. \end{aligned}$$

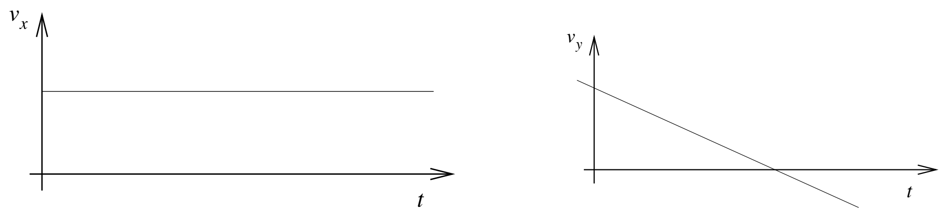

Figura 14: Velocidades.

Solución 18. La piedra lanzada hacia arriba experimenta una fuerza de gravedad, dada por $F_g = -mg$. Además si despreciamos la resistencia del aire entonces la fuerza de gravedad es la única que actua sobre la piedra así que usando la segunda ley de Newton, tenemos que $ma = -mg$, así que al cancelar la masa m obtenemos que la aceleración de la piedra es $a = -g$ en todo su trayecto, incluido el punto de su altura máxima.

Solución 19. Cuando dejamos caer la primer piedra su altura respecto al piso varía con el tiempo según la ley cinématica $h_1 = \frac{1}{2}gt^2$. Al transcurrir medio segundo se suelta la segunda piedra y su altura variará con el tiempo según la ley cinemática $h_2 = \frac{1}{2}g\left(t + \frac{1}{2}s\right)^2$. Así que la distancia de separación de la segunda piedra con la primera es, $h_2 - h_1 = \frac{g}{2}t + \frac{g}{8}$ por lo que la separación aumentará linealmente según vaya transcurriendo el tiempo. La distancia de separación aumenta linealmente con el tiempo ya que después de que ha transcurrido medio segundo, la primer piedra tiene una velocidad incial dada por $v_0 = \frac{g}{2}$, donde g es la aceleración de la gravedad.

Solución 20.

a) En este inciso, la única fuerza que actua sobre el cuerpo es la fuerza de gravedad, la cual va en dirección perpendicular a la superficie de la tierra $\mathbf{F} = -mg\ \hat{\mathbf{j}}$.

b) En este inciso, también la única fuerza que actua sobre el cuerpo es la fuerza de gravedad.

c) En este inciso, también la fuerza de gravedad es la única que actua sobre el cuerpo.

d) En este inciso, a diferencia de los tres anteriores no sólo actua la fuerza de gravedad sino también la fuerza normal que va en dirección perpendicular al plano horizontal $F_N = N\hat{\mathbf{j}}$.

e) En este caso, las fuerzas que actuan sobre el objeto son la fuerza normal (perpendicular al plano inclinado), la fuerza de gravedad y la fuerza de fricción cinética $f_k = \mu_k N$ que actua en dirección opuesta al movimiento del objeto, donde μ_k es el coeficiente de fricción cinético.

f) En este caso, las fuerzas que actuan sobre el cuerpo son la tensión de la cuerda hacia el punto fijo, la fuerza normal (perpendicular al plano horizontal) y la fuerza de gravedad. Cabe mencionar que la tensión genera el movimiento circular uniforme.

Solución 21. La trayectoria es una línea recta y su movimiento será con velocidad constante, puesto que deja de experimentar la constricción que le impone el tubo espiral.

Solución 22. La separación se mantiene constante puesto que las dos piedras se dejan caer simultaneamente. Es decir, ambas piedras caen con una velocidad inicial igual a cero y debido a que la aceleración de la gravedad es constante entonces ambas empezarán a variar su velocidad en la misma razón.

Solución 23. Si el momento de la bala de cañón es $p = mv$ donde m es la su masa y v su velocidad. Entonces si su mása aumenta el doble y su velocidad también aumenta el doble por lo tanto su momento será $p = (2m)(2v) = 4mv$.

Solución 24. La distancia que recorre el insecto antes de que quede aplastado por los trenes se puede obtener si conocemos el tiempo necesario para que los trenes choquen entre sí. Si la distancia que separa a los trenes en el momento incial es $L = 80$km entonces el tiempo necesario para que choquen los trenes será $t = L/v_r$ donde v_r es la velocidad relativa entre los dos trenes. Esta se puede calcular $v_r = (240-(-80))$km/h $= 320$km/h, por lo tanto $t = \frac{1}{4}$km. Así la distancia que recorre el insecto es $d = vt$ donde v es la velocidad del insecto, entonces la distancia es $d = 60$km.

Solución 25. Un instante antes de que la primer bola colisione con la segunda bola, la primer bola tiene una velocidad V y una altura h. Desde que la primer bola es lanzada del suelo ha transcurrido un tiempo t. Así que las ecuaciones de la cinemática con una aceleración $a = -g$, donde g es la aceleración de la gravedad, son

$$\begin{aligned} h &= v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \\ V &= v_0 - gt. \end{aligned}$$

Si resolvemos para t obtenemos que $t = (v_0 - V)/g$ así que sustituyendo en la ecuación para la altura h obtenemos

$$h = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{V^2}{2g}$$

es decir la velocidad de la primer bola justo antes de que colisione con la seguna es $V = \sqrt{v_0^2 - 2gh}$. Si suponemos que la colisión es elástica (lo que corresponde con el inciso a)) entonces usando el principio de conservación de momento, que a la letra nos dice que el momento total del sistema debe ser conservado, obtenemos que $P_1 = P_2$ es decir la primer bola le transfiere todo el momento a la segunda bola. Por lo tanto $2mV = mV_2$, es decir, la segunda bola se empieza a mover hacia arriba con una velocidad $V_2 = 2V$. La segunda bola llegará a su máxima altura x (a partir de la altura h) en un tiempo T_x y llegará con velocidad final igual a cero, por lo tanto,

$$\begin{aligned} x &= V_2 T_x - \frac{g}{2} T_x^2 \\ 0 &= V_2 - g T_x \end{aligned}$$

Despejando T_x en la segunda ecuación y sustituyendola en la ecuación para x obtenemos, $x = \frac{V_2^2}{2g}$, entonces si usamos $V_2 = 2V$ y $V = \sqrt{v_0^2 - 2gh}$ en x obtenemos $x = \frac{2}{g}\left(v_0^2 - 2gh\right)$ sumandole h obetenmos que la altura H a la que llegá la segunda bola después de la colisión respecto al piso es $H = \frac{2}{g}\left(v_0^2 - 2gh\right) + h$.

En el caso en el que las bolas son de arcilla la conservación de momento ahora es $2mV = 3mV_2'$, es decir, $V_2' = \frac{2V}{3}$. Sustituyendo la expresión $V = \sqrt{v_0^2 - 2gh}$ y utilizando la expresión para x obtenemos que la altura a la que llegán las bolas de arcilla es $H' = \frac{2}{3g}\left(v_0^2 - 2gh\right) + h$.

Solución 26. Si la velocidad v del disco es constante entonces $v = \omega R = \omega' R'$, donde $\omega = 490 rev/min$ es la frecuencia del disco a un radio de $2{,}5 cm$ y ω' la frecuencia del disco a un radio $R' = 5{,}8 cm$, por lo tanto $\omega' = \omega R/R' = 211{,}2 rev/min$.

Solución 27. Sí, un experto puede determinar la velocidad a la que iba el coche deportivo. Si reconstruimos la colisión utilizando el principio de conservación de momento es posible obtener la respuesta. Si el coche deportivo se mueve en dirección x entonces su momento es $\mathbf{P}_1 = mV_0\, \hat{\mathbf{i}}$ donde m es la masa del coche deportivo y V_0 es la velocidad con la que iba. Entonces, según el principio de conservación de momento

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_A + \mathbf{P}_B,$$

donde $\mathbf{P}_A$ y $\mathbf{P}_B$ son los momentos del coche deportivo y la camioneta despues de la colisión, respectivamente. Estos momentos se pueden escribir en la siguiente descomposición

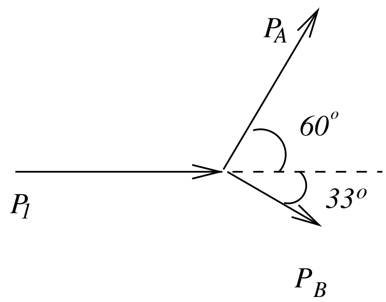

Figura 15: Momentos

vectorial

$$\mathbf{P}_A = mV_A \cos\ 60^o\ \hat{\mathbf{i}} + mV_A \sin\ 60^0\ \hat{\mathbf{j}}$$
$$\mathbf{P}_A = MV_B \cos\ 33^o\ \hat{\mathbf{i}} - MV_B \sin\ 33^0\ \hat{\mathbf{j}},$$

donde V_A es la velocidad con la que sale el coche deportivo despues del choque, $V_B = 21{,}7m/s$ y M es la masa de la camioneta. Usando la conservación de momento encontramos las ecuaciones

$$\begin{aligned} mV_0 &= mV_A \cos\ 60^o + MV_B \cos\ 33^o \\ 0 &= mV_A \sin\ 60^0 - MV_B \sin\ 33^0. \end{aligned}$$

De la última ecuación obtenemos la velocidad V_A, asi que sustituyendo en la ecuación precedente, obtenemos que la velocidad V_0 con la que iba el coche deportivo es

$$V_0 = \frac{MV_B}{m}\left(\cos\ 33^o + \frac{\sin\ 33^o}{\tan\ 60^o}\right)$$

Sustituyendo los valores de M, m y V_B obtenemos que la velocidad con la que iba el coche deportivo es $V_0 = 37{,}38m/s$.

Solución 28. En el supuesto de que un objeto esté más caliente que otro entonces habría una diferencia de calor entre los cuerpos y por lo tanto habría un flujo de calor de un cuerpo al otro por lo que la temperatura de uno seria menor que la del otro por la segunda ley de la termodinámica que a la letra nos dice: el flujo de calor siempre es unidireccional de los cuerpos de alta a baja temperatura. Por lo tanto, un objeto no puede estar más caliente que otro si tienen la misma temperatura.

Solución 29. La temperatura del termómetro disminuye su lectura debido a la segunda ley de la termodinámica. Es decir a pesar que el trozo de hielo y el termómetro se encuentra en un recinto aislado y en el vacio, el calor fluye en forma de radiación electromagnética (así como la radiación que recibimos día con día del astro rey). Entonces partiendo de la segunda ley de la termodinámica el calor fluirá del cuerpo caliente al frio, es decir, del termómetro al trozo de hielo.

Solución 30. El peso de la bolsa no varia puesto que al llenarse de aire lo que varia es la masa de aire interior a la bolsa.

Solución 31. Si $T_{\mathbf{F}}$, $T_{\mathbf{C}}$ y $T_{\mathbf{K}}$ son las temperaturas en la escala Farenheit, Celcius y Kelvein respectivamente entonces las trasnformaciones entre éstas escalas son

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{F}} &= \frac{9}{5}T_{\mathbf{C}} + 32^o \\ T_{\mathbf{C}} &= T_{\mathbf{K}} - 273^o. \end{aligned}$$

Según la tercera ley de la termodinámica (Ley de Nernst), que a la letra dice que es imposible alcanzar el cero absoluto $O^o\mathbf{K}$ a partir de una serie finita de transformaciones termodinámicas en un sistema, la escala destacada de la naturaleza es la de Kelvin puesto que define una referencia absoluta a la temperatura de un sistema.

Solución 32. Cada una de las barras tiene asociado un coeficiente de dilatación lineal el cual representa la deformación de la barra cuando se imprime un cambio de temperatura en la barra. Este coeficiente esta definido por

$$\alpha_L = \frac{\Delta L}{\Delta T}, \tag{1}$$

donde $\Delta L = L - L_0$ y $\Delta T = T - T_0$, es decir, los cambios de longitud y de temperatura de la barra. La razón por la cual la barra de Zinc se pandea y la barra de Hierro queda dentro de la curva es debido a que el coeficiente de dilatación lineal del Zinc es mayor que el correspondiente al del Hierro. Es decir, si ΔL_Z es el cambio de longitud del Zinc y ΔL_H el cambio de longitud del hierro, como ambas barra antes de ser calentadas tienen la misma longitud L entonces de la ecuación anterior obtenemos

$$\frac{\Delta L_Z}{\Delta L_H} = \frac{\alpha_Z}{\alpha_H}$$

y como $\Delta L_Z > \Delta L_H$ entonces $\alpha_Z > \alpha_H$.

Solución 33. La escalas Farenheit y Celcius coinciden cuando $T_{\mathbf{F}} = T_{\mathbf{C}}$, sustituyendo esta expresión en la transformación de Farenheit a Celcius obtenemos

$$T_{\mathbf{C}} = \frac{9}{5}T_{\mathbf{C}} + 32^o,$$

por lo tanto las escalas coinciden a la temperatura $T_{\mathbf{C}} = -40^oC$.

Solución 34. La presión es la fuerza que actúa en un cuerpo por unidad de área. Esta definición, sin embargo, no es propia de los sistemas termodinámicos pues también es útil en el contexto de hidrodinámica y elasticidad. En termodinámica existe una definición alternativa, mas sin embargo equivalente, que a la letra dice que la presión es el cambio en la energía interna de un sistema cuando hay un cambio de volumen. Es decir

$$P = \frac{\Delta U}{\Delta V}|_{Q=constante} \tag{2}$$

Solución 35. Según la ecuación de estado del Gas Ideal el volumen ocupado por n moles, presión p y temperatura T es

$$V = \frac{nRT}{V}. \tag{3}$$

Entonces si tenemos un mol gas ideal en condiciones normales tendremos $n = 1$, $P = 1atm$ y $T = 273^o\ K$. Entonces

$$V = \frac{1mol \times 8{,}31 J/mol \cdot K \times 273^oK}{1{,}01 \times 10^5/Pa} = \frac{8{,}31 \times 273}{1{,}01 \times 10^5}\ J/Pa = 0{,}022\ J/pa. \tag{4}$$

Un Joule $Pa = N/m^2 = (kg\ m/s^2)/m^2 = (kg\ m^2/s^2)/m^3 = J/m^3$ por lo tanto $J/Pa = m^3$. Así el volumen ocupado por un mol de gas ideal en condiciones normales es $V = 0{,}022\ m^3 = 2{,}246 \times 10^4\ cm$.

El número de moleculas que hay en un mol es el número de Avogadro, es decir, $N_A = 6{,}02 \times 10^{23}$ por lo tanto el número de moleculas que hay en el volumen en las condiciones normales es $\rho = N_A/V = 2{,}68 \times 10^{19}$moleculas$/cm^3$.

Solución 36. Utilizando nuevamente la ecuación de estado de un gas ideal, el número de moles por unidad de volumen se puede expresar como

$$\frac{n}{V} = \frac{P}{RT}.$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por el número de Avogadro de tal forma que obtengamos el número de moleculas por unidad de volumen obtenemos

$$\rho = \frac{N}{V} = \frac{PN_A}{RT}.$$

Sustituyendo $P = 1{,}01 \times 10^{-13}$ Pa y $T = 22^o C = 295^o K$ obtenemos

$$\rho = \frac{1{,}01 \times 10^{-13}\ \text{Pa} \times 6{,}02 \times 10^{23}\text{moleculas}/mol}{8{,}31\ \text{J/mol} \cdot \text{K} \times (295^o\text{K})}$$

Simplificando obtenemos

$$\rho = \frac{1{,}01 \times 6{,}02 \times 10^{10}}{8{,}31 \times 295}\ \text{moleculas Pa/J.} \tag{5}$$

Al convertir $J/Pa = m^3 = 10^6$ cm^3 obtenemos que el número de moleculas por unidad de cm^3 es igual a $\rho = 24$ moleculas/cm^3.

Solución 37. El un gas kriptón se puede describir aproximadamente por las propiedades de un gas ideal por lo que tomaremos como validad la ecuación de un gas ideal para describir la termodinámica del gas kriptón. Sea $V_T = V_1 + V_2$ el volumen total en el recipiente, donde $V_1 = 1{,}22$ l y $V_2 = 3{,}18$ l, $T = 16^o\ C$ y $P = 1{,}44$ atm. Antes de que se caliente el recipiente más grande se satisface la siguiente ecuación

$$PV_T = nRT, \tag{6}$$

donde n es el número total de moles de gas kriptón en ambos recipientes. Ahora según las condiciones del problema debemos calentar el recipiente más grande de tal forma que el recipiente más chico se mantenga a la temperatura de $T = 16^o\ C$. Entonces en el recipiente 1 y 2 debe ser valida las ecuaciones

$$\begin{aligned} P_f V_1 &= n_1 RT \\ P_f V_2 &= n_2 RT_f, \end{aligned}$$

donde $T_f = 108^o\ C$ es la temperatura del segundo recipiente después de calentarlo. Aqui n_1 y n_2 son los moles que hay del gas kriptón en cada uno de los recipientes. Además hemos usado el hecho de que el tubo es tan delgado que una vez que es calentado el recipiente 2 ninguna molécula se moverá a travez del tubo de tal forma que la cantidad de sustancia n_2 se mantiene constante. Al dividir las ecuaciones anteriores obtenemos

$$n_2 = \frac{V_2 T}{V_1 T_f} n_1.$$

Usando la ecuación valida cuando ambos recipientes están a una temperatura $T = 16^o\ C$ obtenemos la ecuación,

$$n_1 + n_1 = \frac{PV_T}{RT}, \tag{7}$$

por lo tanto $n_1 = \frac{PV_T}{RT\left(1+\frac{V_2T}{V_1T_f}\right)}$, combinando esta ecuación con la de la ecuación para la presión final obtenemos

$$P_f = \frac{PV_T}{V_1\left(1+\frac{V_2T}{V_1T_f}\right)}. \tag{8}$$

Sustituyendo los valores obtenemos $P_f = 3{,}74$ atm.

Solución 38. La ecuación de estado de un gas ideal esta dada por

$$PV = nRT,$$

donde P, es la presión; V, es el volumen; n es la cantidad de moles en el sistema y T es la temperatura del sistema.

i. Si consideramos un sistema donde la cantidad de moles se mantiene constante el contenido sustancial de la Ley de Boyle-Mariotte corresponde a un proceso isotérmico, es decir, un proceso termodinámico donde la temperatura se mantiene constante. La relación de la P con respecto a la temperatura V a diferentes temperaturas se presenta en la figura 1 y representa los estados termodinámicos en los que puede estar el sistema cuando $T = cte$.

   En el caso en el que consideramos intercambio de materia existe la posibilidad de que la temperatura varie segun el inverso de la cantidad de moles que hay en el sistema. Es decir, $T = A/Rn$, donde $A = P_0/V_0$ es una constante y P_0 y V_0 son la presión y el volumen al momento en que el sistema esta permitiendo el acceso de materia.

ii. Si consideramos un sistema donde la cantidad de sustancia se mantiene constante la Ley de Gay-Charles corresponde con un proceso termodinámico en donde la presión se mantiene constante, dicho proceso se denomina isobárico. La relación de V y T corresponde a diferentes presiónes se presente en la figura 2 y respresenta los estados termodinámicos por los que pasa el sistema a presión constante.

    Si hay intercambio de materia y considerando $V/T = \text{cte}$ la presión variará segun la ley $P = A\ nR$, es decir, la presión es directamente proporcional a la cantidad de sustancia que entra en el sistema. Aqui $A = T_0/V_0$ es una constante y T_0 y V_0 son la temperatura y el volumen al inicio cuando el sistema permite el acceso de materia.

iii. Al considerar un sistema donde la cantidad de sustancia se mantiene constante la 2da Ley de Gay-Charles que el volumen se debe mantener constante. Cuando variamos la presión de tal forma que el volumen se mantenga constante el sistema recorrerá un proceso termodinámico a volumen constante (según la ecuación de estado de los gases ideales). Este proceso termodinámico se denomina proceso isocórico. La relación entre la presión y la temperatura se muestra en la figura 3.

    Si hay intercambio material en el sistema entonces la unica forma de mantener P/T constante es que el volumen sea directamente proporcional a la cantidad de moles que entra en el sistema, es decir, $V = AnR$, donde $A = T_0/P_0$ y T_0 y P_0 son la temperatura y la presión al inicio cuando el sistema permite el acceso de materia.

iv. En el caso de la ley de Avogadro se puede derivar a partir de la ecuación de estado de un gas ideal puesto que si dos o más sistemas compuestos de un gas ideal tienen los mismos valores para la presión, temperatura y volumen entonces según la ecuación de estado de gas ideal el número de moles se mantiene constante. Aqui por definición no hay intercambio material.

v. Si tenemos más de un tipo de moleculas en el sistema entonces según la ley de Pascal la presión total del sistema es igual a la suma de las presiones de sus componentes. Esta ley también se puede derivar de la ecuación de estado de un gas ideal. Sea $n_1, n_2, \cdots, n_k$ las cantidades de sustancia para cada una de la componentes que en total son k. Si la temperatura y el volumen del sistema son T y V respectivamente y como la cantidad total de sustancia en el sistema es $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ entonces, al usar la ecuación de gas ideal, obtenemos

$$P = \frac{n_1RT}{V} + \frac{n_2RT}{V} + \cdots + \frac{n_kRT}{V}.$$

Esta expresión indica que cada grupo distinto de moléculas ejerce una presión independiente de la presión que ejercen los otros grupos de moléculas. Esto, en efecto, esta condicionado por el hecho de que las moléculas no interaccinan entre sí. Si definimos

$$p_1 = \frac{n_1 RT}{V}, \quad p_2 = \frac{n_2 RT}{V}, \quad \cdots, \quad p_k = \frac{n_k RT}{V}$$

como las presiones que ejercen cada uno de los grupos de moléculas entonces tenemos

$$P = p_1 + p_2 + \cdots + p_k,$$

que expresa la esencia de la Ley de Dalton.

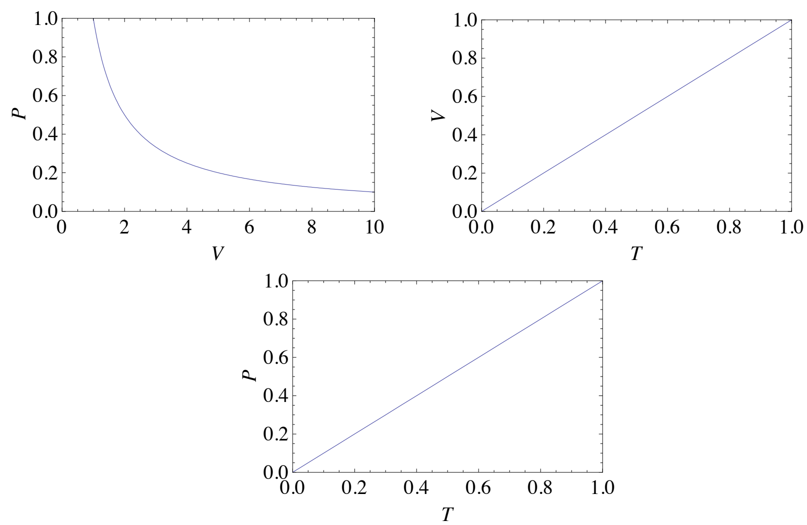

Figura 16: Las gráficas en la parte superior representan los diagramas $P - V$, $V - T$ mientras que la gráfica en la parte inferior el diagrama $P - T$ para un sistema termodinámico en un proceso isotérmico, isobárico e isocórico respectivamente.

Solución 39. Es conocido que todos los cuerpos cerca de la superficie de la tierra se encuentran sujetos bajo la acción de una fuerza de gravedad dada por $F_g \approx -mg$, donde m es la masa del cuerpo y $g = 9,8$ m/s^2 la aceleración de la gravedad. Sin embargo, en la medida que el cuerpo se encuentra a una altura mayor, con respecto a la superficie de la tierra, la fuerza disminuye como consecuencia de la *Ley de Gravitación Universal*. Esta ley expresa la fuerza de interacción entre dos cuerpos de masa m_1 y m_2, es decir,

$$\mathbf{F}_g = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}},$$

donde G es una constante universal, r la distancia de separación entre los cuerpos y $\hat{\mathbf{r}}$ un vector de magnitud 1 a lo largo de la línea que une a los cuerpos.

Si un cuerpo de masa m se encuentra a una altura h arbitraria sobre la superficie de la tierra, entonces, se encuentra bajo la acción de la fuerza gravedad

$$\mathbf{F_g} = -G\frac{M_T m}{(R_T + h)^2}\hat{\mathbf{r}},$$

donde M_T y R_T es la masa y el radio de la Tierra. Partiendo de la segunda ley de Newton, obtenemos que la magnitud de la aceleración del cuerpo está dada por

$$a = G\frac{M_T}{(R_T + h)^2}.$$

Al despejar h obtenemos

$$h = \sqrt{\frac{GM_T}{a}} - R_T$$

Sustituyendo $a = 7$ m/s^2 obtenemos el valor $h = 6 \times 10^5$ m

Solución 40. La energía total mecánica E_T en este sistema consiste en la energía cinética del objeto K, la energía potencial gravitacional U_g y la energía potencial elástica del resorte U_κ. Según el *Principio de Conservación de Energía* la cantidad $E_T = K + U_g + U_\kappa$ es una cantidad conservada a lo largo de todo el movimiento del cuerpo.

Al momento de dejar caer al objeto sobre la rampa se cumple $K = 0$ y $U_\kappa = 0$ (puesto que el resorte esta relajado) y $U_g = mgh$, donde $h = 5$ m. En el instante en el que llega el objeto al resorte se cumple $U_g = 0$ y $U_\kappa = 0$ mientras que la energía cinética $K = \frac{1}{2}mv^2$. Como consecuencia de la conservación de energía $mgh = \frac{1}{2}mv^2$, de donde concluimos que $v = \sqrt{2gh}$.

Al momento de máxima compresión del resorte se cumple $U_g = 0$ y $K = 0$, por lo que la única contribución energética es $U_k = \frac{1}{2}\kappa x^2$. Como consecuencia de la conservación de energía obtenemos $mgh = \frac{1}{2}\kappa x^2$, de donde la máxima compresión es $x = \sqrt{\frac{2mgh}{\kappa}}$.

Solución 41. Imaginemos que el globo esta conectado a través de un hilo (de masa despreciable) con cuerpo A de masa m tan pequeño que podemos despreciar su volumen. Según el principio de Arquímides, un cuerpo sumergido total o parcialmente en un fluido es impulsado hacia arriba por una fuerza de igual magnitud al peso del fluido desplazado por el cuerpo. En este caso, el globo lleno de Helio es el "cuerpo"que se encuentra, en este caso, totalmente sumergido y por lo tanto, el volumen desplazado es el volumen del interior del globo. La fuerza de empuje es, entonces $F_e = \rho_a V g$, donde ρ_a es la densidad del aire y V el volumen desplazado. Las fuerzas de gravedad sobre el globo y el cuerpo A son $F_1 = \rho_{He} V g$ y $F_2 = mg$, respectivamente, donde ρ_{He} es la densidad del Helio. Como queremos que el globo levante al cuerpo A entonces se debe cumplir $F_e - F_1 - F_2 \geq 0$. De esta relación despejamos m para obtener

$$m \leq \frac{4\pi R^3}{3} \left(\rho_a - \rho_{He}\right),$$

donde R es el radio del globo. Sustituyendo los valores indicados en el problema encontramos que $m \leq 3024{,}3$ Kg.

Solución 42. Sea m_r la masa de la roca sobre la superficie lunar. Las fuerzas que actúan sobre la roca son la fuerza gravitacional de la luna de masa m, la fuerza gravitacional del planeta de masa M y la fuerza normal N. Todas estas fuerzas actúan a lo largo de la misma línea por lo que a partir de la segunda ley de Newton tenemos

$$G\frac{Mm_r}{(r-a)^2} - G\frac{mm_r}{a^2} + N = -m_r\frac{v^2}{r-a}, \tag{9}$$

donde v es la velocidad de la roca a lo largo de la órbita circular de la luna. La velocidad v se puede expresar como $v = \omega(r-a)$, donde ω es la velocidad angular.

Por otro lado, la luna se mueve en movimiento circular alrededor del planeta como consecuencia de la fuerza de gravedad del planeta sobre la luna, por lo que apartir de la segunda ley de Newton tenemos

$$-G\frac{Mm}{r^2} = -m\frac{V^2}{r}, \tag{10}$$

donde V es la velocidad tangencial de la luna a lo largo de la órbita de radio r. La velocidad V se puede expresar como $V = \omega r$, donde ω es la misma velocidad angular de la roca, de otra forma la luna no mostraría siempre la misma cara. Sustituyendo la velocidad V en términos de ω en la ecuación (10) y despejando ω obtenemos

$$\omega^2 = G\frac{M}{r^3}. \tag{11}$$

Ahora bien, la roca se elevará sobre la superficie lunar cuando la fuerza normal N se anule. Sustituyendo (11) en la ecuación (9) y cancelando los factores comunes obtenemos que la distancia necesaria $r = r_c$, para que la roca se eleve satisface

$$\frac{M}{(r-a)^2} - \frac{m}{a^2} = \frac{M(r-a)}{r^3},$$

o bien

$$\frac{M}{r^2}\left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-2} - \frac{m}{a^2} = \frac{M(r-a)}{r^3}. \tag{12}$$

Como $r >> a$ usamos el binomio de Newton para realizar una expansión perturbativa. Si $x < 1$ se cumple

$$(1+x)^q = 1 + qx + \frac{q\,(q-1)}{2!}x^2 + \frac{q\,(q-1)\,(q-3)}{3!}x^3 + \cdots,$$

donde q es cualquier número real. En particular si $q = -2$ y $x = -\frac{a}{r}$, entonces al primer orden en la expansión tenemos

$$\left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-2} \approx 1 + 2\frac{a}{r}. \tag{13}$$

Sustituyendo (13) en (12) obtenemos

$$2\frac{Ma}{r^3} - \frac{m}{a^2} = -\frac{Ma}{r^3}.$$

Despejando r obtenemos $r = a\,(3M/m)^{\frac{1}{3}}$.

Solución 43. Llamemos t el tiempo que le toma a la bolita de plastilina caer desde la altura h hasta que golpea la plataforma circular. La plataforma gira 6 vueltas en un segundo de manera constante y ¡el punto que esta a $R/2$ desde su centro también dá 6 vueltas en un segundo! Usando la relación $\omega = 1/T$, el periódo de la plataforma es $T = \frac{1}{6}$ s. Además como la bolita cae después de que la plataforma dá 3/4 de vuelta, por lo tanto $t = \frac{3}{4}T = \frac{1}{8}$s. La ecuación de la caída libre es

$$h = \frac{1}{2}gt^2,$$

donde $g \approx 9{,}8$ m/s^2 es la aceleración de la gravedad. Sustituyendo t en la ecuación anterior obtenemos $h = 0{,}076$ m o bien $h = 7{,}6$ cm.

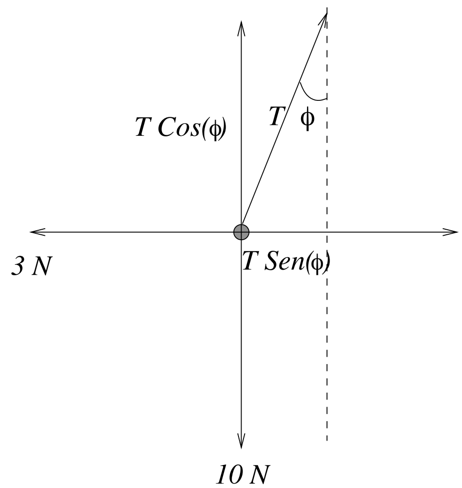

Figura 17: Diagrama de cuerpo libre.

Solución 44. El equilibrio mecánico es la característica más importante en este sistema. Por lo tanto, la suma total de las fuerzas que actuan sobre el cuerpo de peso 10 N debe ser cero. Para identificar las fuerzas que actuan sobre el cuerpo, dibujamos nuestro diagrama de cuerpo libre en la figura 3.

En la figura representamos a T como la tensión que la cuerda ejerce sobre el cuerpo hacia el cuadrante positivo. Entonces la suma de las fuerzas igualadas a cero en el eje x y el eje y son

$$\begin{aligned} T\sin(\phi) &- 3\ N = 0 \qquad \text{En el eje x} \\ T\cos(\phi) &- 10\ N = 0 \qquad \text{En el eje y.} \end{aligned}$$

Esta ecuaciones son equivalentes a

$$\begin{aligned} T\sin(\phi) &= 3\ N \\ T\cos(\phi) &= 10\ N, \end{aligned}$$

respectivamente, así que usando la identidad trigonométrica $\tan(\phi) = \frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)}$ obtenemos

$$\tan(\phi) = \frac{3}{10},$$

entonces el ángulo vale $\phi = \arctan\left(\frac{3}{10}\right) \approx 16{,}69^{o}$.

Solución 45. Para fines prácticos llamaremos $l = 10$ cm, la distancia que emerge en la situación original y $d = 20$ cm, el diámetro del cilindro. También llamaremos a $m_h = 10$ kg y $\rho_h = 7{,}8\text{gr}/\text{cm}^3$ la masa y la densidad del bloque de hierro, respectivamente. Usando la masa y la densidad del bloque de hierro entonces su volumen es igual a $V_h = \frac{m_h}{\rho_h} = 1282{,}05\ \text{cm}^3$. Si en la situación original llamamos V al volumen desplazado por el cilindro, es decir, V es el volumen de la parte del cilindro que queda dentro del agua (ver figura 4). Así, el volumen total desplazado por el cilindro y el bloque de hierro es igual a $V + V_h$. Según el principio de Arquímedes, un cuerpo sumergido total o parcialmente en un líquido es impulsado hacia arriba por una fuerza de igual magnitud al peso del fluído desplazado por el cuerpo. Entonces, tenemos que

$$\rho_a g \left(V + V_h\right) = m_h g,$$

donde ρ_a es la densidad del agua y g la constante de aceleración de la gravedad.
En la segunda situación (donde el bloque de hierro se coloca dentro del cilindro) el peso del fluído desplazado por el cuerpo es igual que en la situación original. Esto significa que el volumen desplazado ¡es exactamente el mismo que en la situación original, es decir, $V + V_h$! (Ver figura 5).

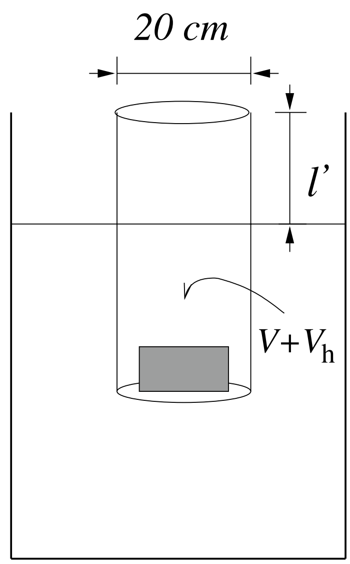

Figura 18: Bloque de hierro dentro del cilindro.

Ahora como el volumen total del cilindro V_T es el mismo en ambas situaciones entonces tenemos la relación

$$V_T = \frac{\pi d^2}{4} l + V = \frac{\pi d^2}{4} l' + V + V_h,$$

donde $\frac{\pi d^2}{4} l$ es el volumen que emerge del cilindro en la situación original y $\frac{\pi d^2}{4} l'$ el volumen que emerge en la segunda situación. Si en la ecuación anterior cancelamos V obtenemos

$$\frac{\pi d^2}{4} l = \frac{\pi d^2}{4} l' + V_h.$$

Despejando l' de la ecuación anterior obtenemos

$$l' = l - \frac{4V_h}{\pi d^2}.$$

Sustituyendo los valores obtenemos que la altura a la que emerge el cilindro en la segunda situación es $l' = 5{,}91$ cm.

Solución 46. En el momento inicial las esferas se encuentran en reposo, es decir, ambas con velocidad inicial igual a cero. Más aún, ambas esferas se moverán hacia el punto donde la varilla esta doblada puesto que las cargas de las esferas son de signo opuesto. Esto implica que cuando se sueltan las esferas su distancia de separación disminuye. Además según la electrostática, la energía eléctrica es

$$U = -\kappa \frac{Q^2}{r}$$

donde κ es la constante de proporcionalidad y r es la distancia que separa a las esferas. Ahora bien, el punto donde la varilla esta doblada a un ángulo recto y los puntos donde se encuentran las esferas forman un triángulo rectángulo donde los catetos valen d y $2d$, y la hipotenusa vale r entonces según el teorema de Pitágoras $r^2 = d^2 + 4d^2 = 5d^2$, es decir, la distancia que separa inicialmente a las esferas vale $r = \sqrt{5}d$.

Cuando la distancia que separa a las esferas vale d, las esferas ya no están en reposo y ahora su energía eléctrica aumenta negativamente. Así usando el principio de conservación de energía, que a la letra nos dice que la energía total del sistema debe ser constante en toda su evolución entonces

$$\frac{mv_{1,i}^2}{2} + \frac{mv_{2,i}^2}{2} + Ui = \frac{mv_{1,f}^2}{2} + \frac{mv_{2,f}^2}{2} + U_f,$$

donde $v_{1,i}$ y $v_{2,i}$ son las velocidades de las esferas de carga Q y la esfera de carga $-Q$, respectivamente. La energía cinética inicial de ambas esferas es cero y la velocidad final es la misma para ambas como consecuencia de la tercera ley de Newton. Entonces $v_{1,f} = v_{2,f} = v$. La velocidad en el instante que las esferas están separadas por una distancia d es v.

La energía eléctrica en el momento incial es

$$U_i = -\kappa \frac{Q^2}{\sqrt{5}d},$$

mientras que la energía eléctrica cuando las esferas están separadas a una distancia d vale

$$U_f = -\kappa \frac{Q^2}{d},$$

por lo tanto, al usar la conservación de energía obtenemos la relación

$$0 - \kappa \frac{Q^2}{\sqrt{5}d} = 2\frac{mv^2}{2} - \kappa \frac{Q^2}{d}.$$

Despejando la velocidad v, obtenemos

$$v = \sqrt{\frac{\kappa Q^2}{md}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)}.$$

Solución 47. Como el gas dentro del botellón es un gas noble entonces podemos utilizar la aproximación de gas ideal. La ecuación de estado de un gas ideal esta dada por $pV = nRT$, donde p es la presión, V es el volumen, n es la cantidad de sustancia, T es la temperatura y R es la constante universal de los gases ideales.

En la primera situación tenemos que la presión es $p_1 = 10^7$ N/m^2 entonces $p_1V_1 = n_1RT$ donde T es la temperatura dentro del botellón. Ahora bien cuando se extrae la cantidad de gas tenemos que la presión es $p_2 = 2{,}5 \times 10^6$ N/m^2 entonces $p_2V_2 = n_2RT$, sin embargo en ambas situaciones el volumen del botellón no cambio. Por lo tanto si $V_1 = V_2 = V$ y despejamos RT/V en ambas ecuaciones obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{RT}{V} &= \frac{p_1}{n_1} \\ \frac{RT}{V} &= \frac{p_2}{n_2}. \end{aligned}$$

Al igualar estas ecuaciones obtenemos

$$\frac{p_1}{n_1} = \frac{p_2}{n_2}.$$

Ahora bien n_2 es la cantidad de sustancia que quedo después de extraer el gas, es decir $n_2 = n_1 - \delta n$ donde δn es la cantidad de sustancia que se extrajo. Por lo tanto usando la ecuación anterior obtenemos que

$$\frac{\delta n}{n_1} = 1 - \frac{p_2}{p_1}. \tag{14}$$

Si para n_1 había $m_1 = 10\text{kg}$ de masa de gas entonces para δn debe haber un cierto δm. Sin embargo para cada extracción de masa de gas que se haga del botellón se reducirá en la misma proporción la cantidad de sustancia entonces $\delta n/n_1 = \delta m/m_1$ por lo tanto la ecuación anterior es equivalente a

$$\delta m = m_1 \left(1 - \frac{p_2}{p_1}\right). \tag{15}$$

Sustituyendo los valores obtenemos $\delta m = 7{,}5\text{kg}$.

Solución 48. Para determinar la compresión del resorte basta utilizar el principio de conservación de energía que a la letra nos dice que la energía total del sistema debe ser conservada. En nuestro caso el sistema esta compuesto por un objeto de masa m y un resorte elástico. Cuando se deja caer el objeto la energía cinética es cero mientras que la energía potencial está dada por la atracción gravitacional que sufre el objeto hacia la superficie de la tierra. Cuando se deja caer, entonces, la energía total del cuerpo esta dada por

$$E_T = mgh,$$

donde $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$ es la aceleración de la gravedad y $h = 5$ m es la altura de donde se suelta el objeto. Cuando el objeto cae y choca con el resorte, el cuerpo comprime al resorte hasta quedar en reposo por lo tanto el objeto llega a un estado donde también su energía cinética es cero mientras que su energía potencial gravitatoria sigue siendo distinta de cero, sin embargo ahora el objeto estará a una altura $l - x$, donde x es la distancia que se comprimida por el resorte. La energía de un resorte comprimido por x es $E_e = \frac{1}{2}kx^2$. Por lo tanto la energía total del sistema es

$$E_T = mg(l - x) + \frac{1}{2}kx^2.$$

Al igualar las ecuaciones anteriores, en virtud del principio de conservación de energía, obtenemos la ecuación

$$mgh = mg(l - x) + \frac{1}{2}kx^2$$

o bien

$$x^2 - \frac{2mg}{k}x + \frac{2mg}{k}(l - h) = 0.$$

Resolviendo la ecuación cuadrática y elegiendo la única solución física posible cuando x es positiva obtenemos

$$x = \frac{mg}{k}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{k}{2mg}(h - l)}\right) \tag{16}$$

Sustituyendo los valores de $m = 1$ kg, $l = 1{,}5m$, $h = 5$ m y $k = 50$ N/m obtenemos que la compresión que sufre el resorte es $x = 0{,}81$ m.

Solución 49. Al instante en el que el protón es acelerado el protón está en reposo y por lo tanto su energía cinética es cero. La única contribución energética para acelerar al protón en ese instante es la energía debida al campo electróstatico. La diferencia de energía del reposo hasta que el protón entra en la región del campo magnético viene dada por $E = eV$, donde e es la carga del protón. Si cuando ingresa a la región del campo magnético constante su velocidad es v entonces, por el principio de conservación de energía se debe satisfacer la ecuación

$$eV = \frac{1}{2}mv^2.$$

Por lo tanto la velocidad en el instante en el que el protón entra en la región de campo magnético es

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}.$$

Una vez que entra en la región de campo magnético el electrón recorrerá una órbita circular por lo que será atraído hacia el centro de la órbita circular por la fuerza centrípeta

$$F = \frac{mv^2}{R},$$

donde v es la velocidad con la que el protón entró a la región del campo magnético y R es el radio de la órbita. Sin embargo, para que el protón se mantenga en la órbita circular la fuerza magnética igual a $F_B = evB$ (sólo cuando el campo magnético es perpendicular a la trayectoria del protón) se debe contraponer con la fuerza centripeta, de otra manera el protón se movería hacia el centro de la órbita circular. Es decir, se debe cumplir

$$\frac{mv^2}{R} = evB.$$

Por lo tanto el radio de la órbita circular que describe el protón es

$$R = \frac{mv}{eB}.$$

Finalmente el periodo que le toma al protón dar una vuelta en la órbita circular es

$$T = \frac{2\pi R}{v}.$$

Sustituyendo los valores en las ecuaciones de la velocidad v, del radio R y el periódo T y usando la carga del protón $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ y la masa del protón $m = 1{,}6 \times 10^{-27}$, obtenemos que

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{2} \times 10^7 \text{ m/s} \\ R &= \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ m} \\ T &= \pi \times 10^{-7} \text{ s} \end{aligned}$$

donde $\pi = 3{,}14159....$

Solución 50. En este problema es imprescindible el principio de conservación de momento lineal, que a la letra nos dice que el momento lineal total del sistema debe ser conservado. En el instante inicial los cuerpos B y C están en reposo por lo que el momento total del sistema viene dado por

$$P_T = mV_0.$$

Como las colisiones son elásticas y frontales entonces el cuerpo A transfiere todo su momento lineal al cuerpo B y al cuerpo C (después de que el cuerpo B haya colisionado con C), entonces según el principio de conservación de momento lineal se debe satisfacer

$$mV_0 = mV_1 + MV_2.$$

La energía total del sistema también es conservada por lo que

$$\frac{1}{2}mV_0^2 = \frac{1}{2}mV_1^2 + \frac{1}{2}MV_2^2,$$

donde V_1 y V_2 son las velocidades finales de los cuerpos B y C, respectivamente. Al combinar las ecuaciones anteriores podemos resolver para V_1 y V_2. Las ecuaciones anteriores se pueden escribir como

$$\begin{aligned} V_1 &= V_0 - \frac{M}{m}V_2 \\ V_0^2 &= V_1^2 + \frac{M}{m}V_2^2. \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado la primera de estas ecuaciones y sustituyendola en la segunda ecuación obtenemos

$$V_2^2\left(\frac{M}{m} + \left(\frac{M}{m}\right)^2\right) - 2\frac{M}{m}V_0V_2 = 0.$$

Despejando para $V_2 \neq 0$ obtenemos

$$V_2 = \frac{2V_0}{1+\frac{m}{M}},$$

y para V_1 obtenemos

$$V_1 = V_0\left(1 - \frac{2}{\frac{m}{M}\left(1+\frac{m}{M}\right)}\right).$$

Si $M = m$ entonces $V_2 = V_0$ y $V_1 = 0$. Este caso corresponde a la situación en que el cuerpo A colisiona con B quedando A con velocidad final igual a cero y el cuerpo B colisiona con C quedando B con velocidad final igual a cero y llevandose todo el momento incial el cuerpo C. Cuando $M < m$ entonces $1 + m/M > 2$ por lo que $V_2 < V_0$. Ahora bien como $1 + m/M > 2$ entonces $1 > 2/(1 + m/M)$ o bien $2M/(m(1 + m/M)) < M/m$ pero $M/m < 1$ por lo tanto $2M/(m(1 + m/M)) < 1$ esto significa que $V_1 < V_0$ y $V_1 > 0$, es decir en este caso solo habra dos colisiones. En este caso las velocidades finales de los cuerpos son, $V_A = 0$, $V_B = V_1$ y $V_C = V_2$.

Cuando $M > m$ entonces $1 + m/M < 2$ por lo que $V_2 > V_0$. Ahora bien como $1 + m/M < 2$ entonces $1 < 2/(1 + m/M)$ o bien $2M/(m(1 + m/M)) > M/m$ pero

$M/m > 1$ por lo tanto $2M/(m(1+m/M)) > 1$ esto significa que $V_1 > V_0$ y $V_1 < 0$, es decir, en este caso V_1 es negativa por lo que necesariamente el cuerpo B tendrá que colisionar con A. Así que tendremos tres colisiones. En este caso las velocidades finales son, $V_A = -V_1$, $V_B = 0$ y $V_C = V_2$.

Solución 51. Las ecuaciones cinemáticas de una partícula (en este caso la pelota) que se mueve hacia arriba (en forma vertical) están dadas por

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{17}$$

$$v = v_0 - gt, \tag{18}$$

donde y y v son la altura y la velocidad, respectivamente, al transcurrir un tiempo t cuando parte de una altura y_0 y a una velocidad inicial v_0, y $g = 9{,}8$ m/s^2 es la constante de aceleración de la gravedad. En este caso la altura inicial es $y_0 = 10$ m y la velocidad inicial es $v_0 = 10$ m/s.

El tiempo t_{max} que transcurre hasta que la pelota alcanza la altura máxima y_{max} corresponde cuando la velocidad v de la pelota es cero. Usando la ecuación (18) y sustituyendo $v = 0$ cuando $t = t_{max}$ entonces obtenemos $0 = v_0 - g t_{max}$, despejando $t_{\text{máx}}$, obtenemos que el tiempo que tarda la pelota en llegar a la altura máxima esta dado por

$$t_{max} = v_0/g = 1{,}02 \text{ s}$$

La altura máxima se obtiene, entonces, al sustituir $y = y_{max}$ cuando $t = t_{\text{máx}}$ en la ecuación (17). Entonces obtenemos

$$y_{max} = y_0 + v_0 t_{max} - \frac{1}{2} g t_{max}^2,$$

sustituyendo t_{max} y simplificando la expresión anterior obtenemos

$$y_{max} = y_0 + \frac{v_0^2}{g} = 20{,}2 \text{ m}$$

Por simetría el tiempo que le toma a la pelota alcanzar la altura máxima es el mismo tiempo que le toma regresar al punto de donde partió, es decir, a la altura de $y_0 = 10$ m. Así que para responder a la tercer pregunta debemos calcular el tiempo τ que le toma a la pelota ir de la altura de 10 m al suelo. En este caso debemos sustituir $y = 0$ y $t = \tau$ en la ecuación (17), además debemos cambiar el signo de la velocidad v_0 pues ahora la pelota va hacia el suelo. Entonces obtenemos

$$0 = y_0 - v_0 \tau - \frac{1}{2} g \tau^2,$$

despejando τ de la ecuación anterior y eligiendo la raíz positiva obtenemos

$$\tau = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gy_0}}{g}. \tag{19}$$

Entonces el tiempo que le toma a la pelota para que llegue al piso está dado por dos veces el tiempo máximo más el tiempo τ, es decir,

$$T = 2t_{max} + \tau = \frac{v_0}{g} + \frac{1}{g}\sqrt{v_0^2 + 2gy_0} = 2{,}77 \text{ s}. \tag{20}$$

Solución 52. Según el principio de Arquímedes un cuerpo sumergido total o parcialmente es impulsado hacia arriba por una fuerza de igual magnitud al peso del fluido desplazado por el cuerpo. El peso del fluido desplazado en el caso que el bloque de madera esta sumergido en agua es igual a $\frac{2}{3}\rho_a V_m g$, donce ρ_a es la densidad del agua, V_m es el volumen total del bloque de madera y g es la constante de aceleración de gravedad. Según el principio de Arquímides tenemos que

$$\frac{2}{3}\rho_a V_m g = \rho_m V_m g,$$

donde ρ_m es la densidad del bloque de madera. Despejando ρ_m obtenemos que la densidad del bloque de madera esta dado por

$$\rho_m = \frac{2}{3}\rho_a = \frac{2}{3} \text{ gr/cm}^3.$$

El peso del fluido desplazado en el caso en el que el bloque de madera está sumergido en aceite esta dado por $\frac{9}{10}\rho_o V_M g$, donde ρ_o es la densidad del aceite. Según el principio de Arquímides tenemos que

$$\frac{9}{10}\rho_o V_M g = \rho_m V_m g,$$

despejando ρ_0 obtenemos que la densidad del aceite está dada por

$$\rho_o = \frac{10}{9}\rho_m$$

o bien

$$\rho_o = \frac{20}{27}\rho_a = \frac{20}{27} \text{ gr/cm}^3.$$

Solución 53. Según el principio de conservación de energía, la suma de la energía cinética y la energía potencial, es decir,

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgy,$$

es una cantidad conservada en todo momento. En este caso v es la velocidad del carrito y y es la altura a la que se encuentra. Como E es una cantidad conservada entonces la energía total en el punto A debe ser igual a la energía total en el punto B y al punto C. Por lo tanto

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_B^2 + mg\left(\frac{3}{4}h\right), \tag{21}$$

donde v_B es la velocidad en el punto B a una altura $3/4\ h$. Despejando v_B de la ecuación anterior obtenemos

$$v_B = \sqrt{v_0^2 + \frac{gh}{2}}$$

Usando el mismo procedimiento la energía total en el punto A es la misma que en el punto C, es decir,

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_C^2,$$

donde v_C es la velocidad en el punto C a una altura $y = 0$. Despejando v_C obtenemos

$$v_C = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

Solución 54. Según la ley de Coulomb la fuerza que hay entre dos partícula puntuales y cargadas, es proporcional al producto de sus cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa. En este caso, como la partícula de carga q_3 está en equilibrio bajo la acción de las fuerzas eléctricas, obtenemos que la fuerza total que actúa sobre la partícula de carga q_3 es igual a cero, es decir,

$$F_{total} = \kappa\frac{q_1 q_3}{(2d)^2} + \kappa\frac{q_2 q_3}{d^2} = 0,$$

donde κ es una constante de proporcionalidad cuyo valor en este problema carece de importancia. Despejando q_1 en función de q_2 obtenemos

$$q_1 = -4q_2.$$

Solución 55. Si llamamos V_0 la velocidad con la que sigue el tren después de que se separa uno de sus vagones, entonces el tren se movió una distancia $d_T = V_0 t$, en un tiempo t (puesto que según las condiciones del problema el tren sigue con la misma velocidad, es decir, con movimiento rectilíneo uniforme). Ahora bien, el vagón se detiene con aceleración constante a a partir del momento que se desprende del tren, por lo tanto, la distancia que el vagón recorrerá en un tiempo t es

$$d_v = V_0 t - \frac{1}{2} a t^2. \tag{22}$$

Si el tiempo t es el tiempo que le toma al vagón para detenerse por completo, entonces se cumple

$$0 = V_0 - at, \tag{23}$$

puesto que la velocidad final del vagón es cero. Despejando el tiempo en la ecuación de movimiento del tren y sustituyendo en la ecuación (23) obtenemos $a = V_0^2/d_T$. Ahora, sustituimos la aceleración y el tiempo t en la ecuación (22) para obtener $d_v = \frac{1}{2} d_T$, es decir, el vagón recorre la mitad de la distancia que recorre el tren antes de su detención.

Solución 56. La corriente que se conduce entre los puntos AB y AC de dos conductores conectados en serie es la misma, mientras que la diferencia de potencial eléctrico cumple $V_{AC} = V_{AB} + V_{BC}$ (Ver figura (19)). Sea R_1 y R_2 las resistencia entre los puntos AB y BC. Partiendo de la ley de Ohm, es decir, que la diferencia de potencial entre dos puntos de un circuito esta dada por la relación $V = iR$, donde i es la corriente y R la resistencia, es fácil obtener que la resistencia efectiva del circuito es $R_s = R_1 + R_2$ para dos conductores conectados en serie.

Cuando los conductores están conectados en paralelo la corriente se divide en el nodo (ver figura (20)) de tal forma que $i = i_1 + i_2$. Como la diferencia de potencial es la misma para ambos conductores entonces se cumple la relación

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \tag{24}$$

donde R_p es la resistencia efectiva en este caso. Si $R_s = 4R_p$ entonces obtenemos la condición algebráica

$$R_1 + R_2 = 4\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, .$$

Resolviendo esta ecuación obtenemos que $R_1 = R_2$.

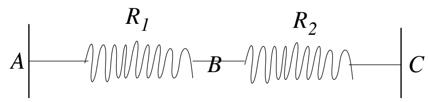

Figura 19:

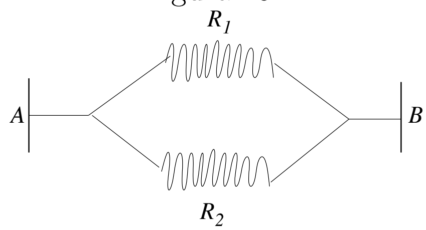

Figura 20:

Solución 57. Al lanzar la pelota verticalmente hacia arriba, la única fuerza que actúa sobre la pelota es la fuerza de gravedad $F_g = -mg$, donde $g = 9{,}8$ m/s^2 (cuando despreciamos la fuerza de resistencia del aire). Como consecuencia de la segunda Ley de Newton, la aceleración de la pelota es $a = -g$, entonces el movimiento de la pelota es uniformemente acelerado. Las ecuaciones del movimiento del cuerpo, en línea recta, con aceleración constante son

$$\begin{aligned} y &= y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ v_y &= v_0 + at \end{aligned}$$

Sea $y_0 = 0$ el punto en el espacio desde donde se lanza la pelota. Ahora bien, si $y = H$ es la máxima altura entonces t sería el tiempo que transcurriría desde que la pelota es lanzada hasta que llega a la altura máxima y $v_y = 0$ es la velocidad en ese punto. Sustituyendo estas condiciones en las ecuaciones anteriores encontramos que

$$H = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{25}$$

$$t = v_0/g, \tag{26}$$

Al sustituir la ecuación (26) en la ecuación (25) es fácil encontrar que la velocidad que necesitamos imprimir en la pelota es $v_0 = \sqrt{2gH}$. El tiempo que la pelota se mantiene en aire es dos veces el tiempo t, el tiempo de subida y el tiempo de bajada.

Solución 58. A lo largo del movimiento del agua a través del tubo de radio R se conserva la materia. Este hecho se fundamenta en la ecuación de continuidad que para un fluido estacionario, incompresible y sin viscosidad es equivalente a la ecuación

$$\rho v A = cte,$$

donde A es el área de la sección transversal por donde se esta moviendo el fluido. En nuestro caso particular, tenemos que $A = \pi R^2$. Como la densidad del agua se mantiene constante entonces la razón de flujo volumétrico vA se mantiene constante y por lo tanto $vA = V/t$, donde t es el tiempo necesario para llenar un recipiente de volumen V. El tiempo esta dado, entonces, por

$$t = \frac{V}{\pi R^2 v_0}.$$

Solución 59. Cuando soltamos el cuerpo desde la cumbre del aro, el cuerpo empezará a moverse por acción de la fuerza de gravedad. Elejimos un marco de referencia situado en un punto arbitrario entre el punto incial y el punto donde el cuerpo se desprende del aro como se indica en la figura (21).

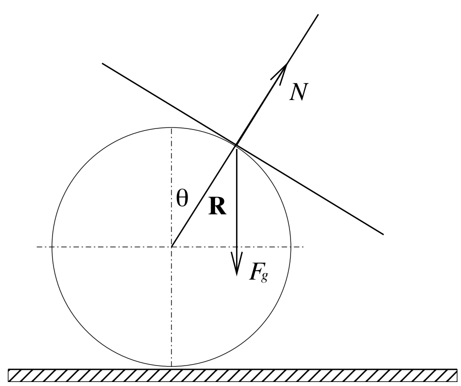

Figura 21:

Partiendo de la segunda ley de Newton $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ y realizando una despomposición vectorial según los ejes de la figura (21) obtenemos las ecuaciones

$$N - mg\cos\theta = ma_n \tag{27}$$
$$mg\sin\theta = ma_t, \tag{28}$$

donde N es la fuerza normal, a_n la aceleración radial hacia el centro del aro, y a_t la aceleración tangencial al ciruclo. $-mg\cos\theta$ y $mg\sin\theta$ son las componentes de la fuerza de gravedad en este marco de referencia. Un instante antes que el cuerpo se desprenda del aro el movimiento del cuerpo es circular, pero no uniforme, puesto que el cuerpo parte del reposo. Aunque el movimiento circular no es uniforme la aceleración centrípeta tiene la expresión $a_n = -v^2/R$. (La diferencia entre el movimiento circular uniforme y no uniforme radica en que, en el primero la aceleración tangencial $a_t = 0$, es decir, que la velocidad v es constante). El punto cuando se desprende corresponde cuando la fuerza normal ya no actúa sobre el cuerpo. En este punto tenemos la ecuación

$$\frac{mv^2}{R} = mg\cos\theta. \tag{29}$$

Con el fin de encontrar el ángulo θ, al cual se desprende el objeto usamos el *principio de conservación de energía*. La energía total mecánica del cuerpo en movimiento es $E = mv^2/2 + mgy$, donde mgy es el potencial gravitacional medido respecto el suelo donde descansa el aro. Como la cantidad E es constante a lo largo de todo el movimiento del cuerpo, entonces la energía total en la cumbre del aro tiene que ser igual a la energía total en el punto donde el cuerpo se desprende del aro, es decir,

$$E = 0 + 2mgR = \frac{1}{2}mv^2 + mg(R + R\cos\theta). \tag{30}$$

Simplificando esta ecuación obtenemos

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgR\left(1 - \cos\theta\right). \tag{31}$$

Resolviendo las ecuaciones (29) y (31) para las variables θ y v, obtenemos que el ángulo y la velocidad en el instante que el cuerpo se desprende del aro son

$$\begin{aligned} \theta &= \arccos\left(2/3\right) \approx 48{,}1^o, \\ v &= \sqrt{\frac{2}{3}gR}, \end{aligned}$$

respectivamente.

Solución 60. Como cada una de las cargas está en equilibrio mecánico, a partir de la segunda ley de Newton, podemos concluir que la suma de todas las fuerzas que actúa sobre cada una de las cargas se debe anular. Las fuerzas actúan sobre una de las cargas son la fuerza de tensión $\mathbf{T}$, la fuerza de gravedad $\mathbf{F}_g$ y la fuerza de Coulumb. La última fuerza nos indica que la fuerza de interacción entre dos cargas q_1 y q_2 esta dada por

$$\mathbf{F}_C = \kappa\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}, \tag{32}$$

donde κ es una constante de proporcionalidad, r es la distancia que separa a las cargas y $\hat{\mathbf{r}}$ es un vector de magnitud 1 que esta a lo largo de la línea que une a las cargas.

Elejimos un marco de referencia cuyo origen este situado en el lugar donde se encuentra la carga izquierda. Entonces las fuerzas que actúan sobre esta carga se pueden descomponer en los vectores ortogonales $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\mathbf{T} &= T\sin\theta\mathbf{i} + T\cos\theta\mathbf{j}, \\
\mathbf{F}_g &= -mg\mathbf{j}, \\
\mathbf{F}_C &= -\kappa\frac{Q^2}{L^2}\mathbf{i}.
\end{aligned}$$

Como el equilibrio mecánico demanda que la suma de $\mathbf{T}$, $\mathbf{F}_g$ y $\mathbf{F}_C$ es cero entonces obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned}
T\sin\theta &= \kappa\frac{Q^2}{L^2} \\
T\cos\theta &= mg.
\end{aligned}$$

Usando la relación geométrica $L/2 = \ell\sin\theta$ y $\sqrt{\ell^2 - L^2/4} = \ell\cos\theta$ y resolviendo el sistema anterior de ecuaciones para Q y T obtenemos

$$\begin{aligned}
Q &= \left(\frac{mgL^3}{2\kappa\sqrt{\ell^2 - \frac{L^2}{4}}}\right)^{\frac{1}{2}}, \\
T &= \frac{mg\ell}{\sqrt{\ell^2 - \frac{L^2}{4}}}.
\end{aligned}$$

Solución 61. A partir de *la ley de Coulomb* (32), podemos concluir que la carga Q situada en el centro del cuadrado debe ser de signo contrario al de las cuatro cargas situadas en los vértices del cuadrado. Si la carga Q fuera del mismo signo, las cinco cargas se repelerían y las cargas situadas en los vértices divergerían hacia fuera del cuadrado y no se alcanzaría equilibrio mecánico.

Para determinar el valor específico que debe tener Q con el fin de que el sistema alcance el equilibrio mecánico debemos sumar todas las fuerzas que actúan sobre alguna de las cargas de los vértices e igualar el resultado a cero. Supongamos que elejimos la segunda

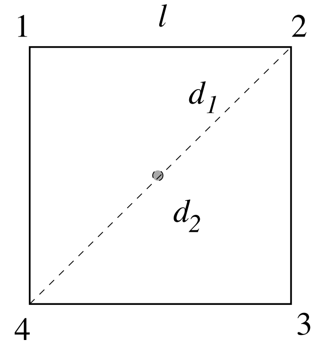

Figura 22:

carga (según la numeración de la figura (22)). Las fuerzas que actúan sobre esta carga son

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F}_{Q2} &= -\kappa\frac{Qq}{d_1^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}\right)\\
\mathbf{F}_{42} &= \kappa\frac{q^2}{d_2^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}\right)\\
\mathbf{F}_{12} &= \kappa\frac{q^2}{\ell^2}\mathbf{i}\\
\mathbf{F}_{32} &= \kappa\frac{q^2}{\ell^2}\mathbf{j},
\end{aligned}
$$

donde d_1 es la distancia que hay entre el origen y segundo vértice, d_2 es la distancia entre el cuarto y segundo vértice y ℓ es el lado del cuadrado. Usando el teorema de Pitagoras, es posible demostrar que $d_1 = \ell/\sqrt{2}$ y $d_2 = \sqrt{2}\ell$. Al imponer la condición de equilibrio $\mathbf{F}_{Q2} + \mathbf{F}_{42} + \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{32} = 0$, obtenemos la relación

$$-\kappa\frac{\sqrt{2}Qq}{\ell^2} + \kappa\frac{q^2}{2\sqrt{2}\ell^2} + \kappa\frac{q^2}{\ell^2} = 0.$$

Despejando Q obtenemos que la cantidad de carga necesaria para tener equilibruo mecánico es

$$Q = \frac{q}{4}\left(2\sqrt{2}+1\right).$$