Aplicando Series infinitas a fenómenos físicos

Isac Samael Lainez Sevilla
III Olimpiada Mesoaméricana de Física

7 de Agosto 2020

1. ¿Qué es una sucesión?
2. ¿Qué es una serie?
3. Problemas con diferentes series infinitas

1. ¿Qué es una sucesión?
2. ¿Qué es una serie?
3. Problemas con diferentes series infinitas

1. ¿Qué es una sucesión?
2. ¿Qué es una serie?
3. Problemas con diferentes series infinitas

¿Que es una sucesión?

Definición

Una sucesión se puede pensar como una lista de números escritos en un orden definido:

$$a_1, \ a_2, \ a_3, \ a_4, \ a_5, \ \ldots$$

El número a_1 recibe el nombre de primer término, a_2 es el segundo término y, en general, a_n es el n-ésimo término. Para todo entero positivo n hay un número correspondiente a_n, por lo que una sucesión se puede definir como una función cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos.

Notación de sucesión

La sucesión a_1, a_2, a_3,... también se denota mediante:

$$\{a_n\} \text{ o } \{a_n\}_1^{\infty}$$

Ejemplo

$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}_1^{\infty}$

$a_n = \frac{1}{2^n}$, $\forall$ n ≥ 1

$\left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots \right\}$

Definición

Sea $a_n = \{a_1, a_2, a_3, a_4, ...\}$ *una sucesión arbitraria, se denota con* S_n *a la n-ésima suma parcial, es decir* $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

$a_n = \frac{1}{2^n}$

$\{\frac{1}{2^n}\}_1^\infty = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\}$

1. $S_1 = \frac{1}{2}$
2. $S_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 0.75$
3. $S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 0.875$
4. $S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 0.9375$

Definición

Sea $a_n = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\}$ una sucesión arbitraria, se denota con S_n a la n-ésima suma parcial, es decir $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

$a_n = \frac{1}{2^n}$

$\{\frac{1}{2^n}\}_1^\infty = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\}$

1. $S_1 = \frac{1}{2}$
2. $S_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 0.75$
3. $S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 0.875$
4. $S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 0.9375$

Definición

Sea $a_n = \{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4, \ldots\}$ *una sucesión arbitraria, se denota con* S_n *a la n-ésima suma parcial, es decir* $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

$a_n = \frac{1}{2^n}$

$\{\frac{1}{2^n}\}_1^\infty = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\}$

1. $S_1 = \frac{1}{2}$
2. $S_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 0.75$
3. $S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 0.875$
4. $S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 0.9375$

Definición

Sea $a_n = \{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4, \ldots\}$ *una sucesión arbitraria, se denota con* S_n *a la n-ésima suma parcial, es decir* $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

$a_n = \frac{1}{2^n}$

$\{\frac{1}{2^n}\}_1^\infty = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\}$

1. $S_1 = \frac{1}{2}$
2. $S_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 0.75$
3. $S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 0.875$
4. $S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 0.9375$

¿Qué es una serie?

Definición

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

que se denomina ***serie infinita*** *(o solo* ***serie****) y se denota con el símbolo*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Definición

Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ *, sea* S_n *la n-ésima suma parcial:*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

Si la sucesión $\{S_n\}$ *es convergente y* $\lim_{n\to\infty}(S_n) = S$ *existe como un número real, entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *se dice convergente y se escribe*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = S \text{ o } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

El número S se llama suma de la serie. Si la sucesión $\{S_n\}$ *es divergente, entonces la serie es divergente.*

Ejemplo

Supongamos que sabemos que la suma de los primeros n términos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es:*

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \frac{2n}{3n+5}$$

Entonces la suma de la serie es el límite de la sucesión $\{S_n\}$*:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{3n+5}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3+\frac{5}{n}}\right) = \frac{2}{3}$$

Definición

$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \ldots$

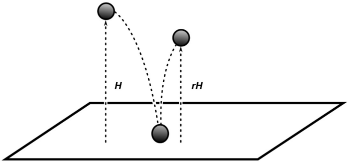
Es convergente si $|r| \leq 1$ *y su suma es:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} \;, \; |r| \leq 1$$

Si $|r| \geq 1$*, la serie geométrica es divergente.*

Problema

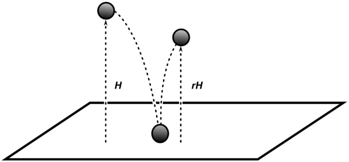
Una pelota tiene la propiedad de que, cada vez que cae desde una altura H sobre una superficie nivelada y dura, rebota hasta una altura rH, donde $0 < r < 1$. Suponga que la pelota cae desde una altura inicial de H metros.



1. Suponiendo que la pelota continúa rebotando de manera indefinida, calcule la distancia total que recorre verticalmente.
2. Calcule el tiempo total que la pelota viaja. (Use el hecho de que la pelota cae $\frac{1}{2}gt^2$ metros en t segundos.)

Problema

Una pelota tiene la propiedad de que, cada vez que cae desde una altura H sobre una superficie nivelada y dura, rebota hasta una altura rH, donde $0 < r < 1$. Suponga que la pelota cae desde una altura inicial de H metros.



1. Suponiendo que la pelota continúa rebotando de manera indefinida, calcule la distancia total que recorre verticalmente.
2. Calcule el tiempo total que la pelota viaja. (Use el hecho de que la pelota cae $\frac{1}{2}gt^2$ metros en t segundos.)

Solución

a) Inicialmente, la bola cae desde una distancia H, después del rebote alcanza una altura rH, vuelve a caer y alcanza una nueva altura r^2H, etc. La distancia total que recorre es:

1. $= H + 2rH + 2r^2H + 2r^3H + \ldots$
2. $= H[1 + 2r + 2r^2 + 2r^3 + \ldots]$
3. $= H[1 + 2r(1 + r + r^2 + r^3 + \ldots)]$
4. $= H[1 + 2r(1 + r + r^2 + r^3 + \ldots)\ ]$
5. $1 + r + r^2 + r^3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = \dfrac{1}{1-r}$
7. $= H[1 + 2r(\dfrac{1}{1-r})]$
8. $= \boxed{H(\dfrac{1+r}{1-r}) metros}$

Solución

a) Inicialmente, la bola cae desde una distancia H, después del rebote alcanza una altura rH, vuelve a caer y alcanza una nueva altura r^2H, etc. La distancia total que recorre es:

1. $= H + 2rH + 2r^2H + 2r^3H + \ldots$
2. $= H[1 + 2r + 2r^2 + 2r^3 + \ldots]$
3. $= H[1 + 2r(1 + r + r^2 + r^3 + \ldots)]$
4. $= H[1 + 2r(1 + r + r^2 + r^3 + \ldots)\ ]$
5. $1 + r + r^2 + r^3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = \dfrac{1}{1-r}$
7. $= H[1 + 2r(\dfrac{1}{1-r})]$
8. $= \boxed{H(\dfrac{1+r}{1-r}) metros}$

a) Inicialmente, la bola cae desde una distancia H, después del rebote alcanza una altura rH, vuelve a caer y alcanza una nueva altura r^2H, etc. La distancia total que recorre es:

1. $= H + 2rH + 2r^2H + 2r^3H + \ldots$
2. $= H[1 + 2r + 2r^2 + 2r^3 + \ldots]$
3. $= H[1 + 2r(1 + r + r^2 + r^3 + \ldots)]$
4. $= H[1 + 2r(1 + r + r^2 + r^3 + \ldots)]$
5. $1 + r + r^2 + r^3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = \dfrac{1}{1-r}$
7. $= H[1 + 2r(\dfrac{1}{1-r})]$
8. $= \boxed{H(\dfrac{1+r}{1-r}) metros}$

a) Inicialmente, la bola cae desde una distancia H, después del rebote alcanza una altura rH, vuelve a caer y alcanza una nueva altura r^2H, etc. La distancia total que recorre es:

1. $= H + 2rH + 2r^2H + 2r^3H + \ldots$
2. $= H[1 + 2r + 2r^2 + 2r^3 + \ldots]$
3. $= H[1 + 2r(1 + r + r^2 + r^3 + \ldots)]$
4. $= H[1 + 2r(1 + r + r^2 + r^3 + \ldots)\ ]$
5. $1 + r + r^2 + r^3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = \dfrac{1}{1-r}$
7. $= H[1 + 2r(\dfrac{1}{1-r})]$
8. $= \boxed{H(\dfrac{1+r}{1-r}) metros}$

Solución

a) Inicialmente, la bola cae desde una distancia H, después del rebote alcanza una altura rH, vuelve a caer y alcanza una nueva altura r^2H, etc. La distancia total que recorre es:

1. $= H + 2rH + 2r^2H + 2r^3H + \ldots$
2. $= H[1 + 2r + 2r^2 + 2r^3 + \ldots]$
3. $= H[1 + 2r(1 + r + r^2 + r^3 + \ldots)]$
4. $= H[1 + 2r(1 + r + r^2 + r^3 + \ldots)\ ]$
5. $1 + r + r^2 + r^3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = \dfrac{1}{1-r}$
7. $= H[1 + 2r(\dfrac{1}{1-r})]$
8. $= \boxed{H(\dfrac{1+r}{1-r}) metros}$

a) Inicialmente, la bola cae desde una distancia H, después del rebote alcanza una altura rH, vuelve a caer y alcanza una nueva altura r^2H, etc. La distancia total que recorre es:

1. $= H + 2rH + 2r^2H + 2r^3H + \ldots$
2. $= H[1 + 2r + 2r^2 + 2r^3 + \ldots]$
3. $= H[1 + 2r(1 + r + r^2 + r^3 + \ldots)]$
4. $= H[1 + 2r(1 + r + r^2 + r^3 + \ldots)\ ]$
5. $1 + r + r^2 + r^3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = \dfrac{1}{1-r}$
7. $= H[1 + 2r(\dfrac{1}{1-r})]$
8. $= \boxed{H(\dfrac{1+r}{1-r}) metros}$

Solución

a) Inicialmente, la bola cae desde una distancia H, después del rebote alcanza una altura rH, vuelve a caer y alcanza una nueva altura r^2H, etc. La distancia total que recorre es:

1. $= H + 2rH + 2r^2H + 2r^3H + \ldots$
2. $= H[1 + 2r + 2r^2 + 2r^3 + \ldots]$
3. $= H[1 + 2r(1 + r + r^2 + r^3 + \ldots)]$
4. $= H[1 + 2r(1 + r + r^2 + r^3 + \ldots)]$
5. $1 + r + r^2 + r^3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = \dfrac{1}{1-r}$
7. $= H[1 + 2r(\dfrac{1}{1-r})]$
8. $= \boxed{H(\dfrac{1+r}{1-r}) metros}$

a) Inicialmente, la bola cae desde una distancia H, después del rebote alcanza una altura rH, vuelve a caer y alcanza una nueva altura r^2H, etc. La distancia total que recorre es:

1. $= H + 2rH + 2r^2H + 2r^3H + \ldots$
2. $= H[1 + 2r + 2r^2 + 2r^3 + \ldots]$
3. $= H[1 + 2r(1 + r + r^2 + r^3 + \ldots)]$
4. $= H[1 + 2r(1 + r + r^2 + r^3 + \ldots)\ ]$
5. $1 + r + r^2 + r^3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = \dfrac{1}{1-r}$
7. $= H[1 + 2r(\dfrac{1}{1-r})]$
8. $= \boxed{H(\dfrac{1+r}{1-r}) metros}$

b) Sabemos que la bola cae $\frac{1}{2}gt^2$ metros en t segundos, donde g es la aceleración gravitacional. Así, una bola cae h metros en t = $\sqrt{\frac{2h}{g}}$ segundos. El tiempo total es:

$$=\sqrt{\frac{2H}{g}} + 2\sqrt{\frac{2Hr}{g}} + 2\sqrt{\frac{2Hr^2}{g}} + 2\sqrt{\frac{2Hr^3}{g}} + ...$$

1. $$=\sqrt{\frac{2H}{g}} + 2\sqrt{\frac{2Hr}{g}} + 2\sqrt{\frac{2Hr^2}{g}} + 2\sqrt{\frac{2Hr^3}{g}} + ...$$
2. $$=\sqrt{\frac{2H}{g}}\,[1 + 2\sqrt{r} + 2\sqrt{r}^2 + 2\sqrt{r}^3 + 2\sqrt{r}^4 + ...]$$
3. $$=\sqrt{\frac{2H}{g}}\,[1 + 2\sqrt{r}(1 + \sqrt{r} + \sqrt{r}^2 + \sqrt{r}^3 + ...)]$$

Solución

b) Sabemos que la bola cae $\frac{1}{2}$gt^2 metros en t segundos, donde g es la aceleración gravitacional. Así, una bola cae h metros en t = $\sqrt{\frac{2h}{g}}$ segundos. El tiempo total es:

$$=\sqrt{\frac{2H}{g}} + 2\sqrt{\frac{2Hr}{g}} + 2\sqrt{\frac{2Hr^2}{g}} + 2\sqrt{\frac{2Hr^3}{g}} + \dots$$

1. $=\sqrt{\frac{2H}{g}} + 2\sqrt{\frac{2Hr}{g}} + 2\sqrt{\frac{2Hr^2}{g}} + 2\sqrt{\frac{2Hr^3}{g}} + \dots$
2. $=\sqrt{\frac{2H}{g}}\ [1+ 2\sqrt{r} + 2\sqrt{r}^2 + 2\sqrt{r}^3 + 2\sqrt{r}^4 + \dots]$
3. $=\sqrt{\frac{2H}{g}}\ [1+ 2\sqrt{r}(1 + \sqrt{r} + \sqrt{r}^2 + \sqrt{r}^3 + \dots)]$

b) Sabemos que la bola cae $\frac{1}{2}gt^2$ metros en t segundos, donde g es la aceleración gravitacional. Así, una bola cae h metros en $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ segundos. El tiempo total es:

$$=\sqrt{\frac{2H}{g}} + 2\sqrt{\frac{2Hr}{g}} + 2\sqrt{\frac{2Hr^2}{g}} + 2\sqrt{\frac{2Hr^3}{g}} + \dots$$

1. $=\sqrt{\frac{2H}{g}} + 2\sqrt{\frac{2Hr}{g}} + 2\sqrt{\frac{2Hr^2}{g}} + 2\sqrt{\frac{2Hr^3}{g}} + \dots$
2. $=\sqrt{\frac{2H}{g}}\,[1 + 2\sqrt{r} + 2\sqrt{r}^2 + 2\sqrt{r}^3 + 2\sqrt{r}^4 + \dots]$
3. $= \sqrt{\frac{2H}{g}}\,[1 + 2\sqrt{r}(1 + \sqrt{r} + \sqrt{r}^2 + \sqrt{r}^3 + \dots)]$

Solución

1. $= \sqrt{\frac{2H}{g}}\,[1+ 2\sqrt{r}(1 + \sqrt{r} + \sqrt{r}^2 + \sqrt{r}^3 + ...)]$
2. $(1 + \sqrt{r} + \sqrt{r}^2 + \sqrt{r}^3 + \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{r}^{n-1}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{r}^{n-1} = \frac{1}{1-\sqrt{r}}$
4. $= \sqrt{\frac{2H}{g}}\,[1+ 2\sqrt{r}(\frac{1}{1-\sqrt{r}})]$
5. $= \boxed{\sqrt{\frac{2H}{g}\frac{1+\sqrt{r}}{1-\sqrt{r}}}}$

Solución

1. $= \sqrt{\frac{2H}{g}}\,[1+\,2\sqrt{r}(1+\sqrt{r}+\sqrt{r}^2+\sqrt{r}^3+...)]$
2. $(1+\sqrt{r}+\sqrt{r}^2+\sqrt{r}^3+\,...\,) = \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{r}^{n-1}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{r}^{n-1} = \frac{1}{1-\sqrt{r}}$
4. $= \sqrt{\frac{2H}{g}}\,[1+\,2\sqrt{r}(\frac{1}{1-\sqrt{r}})]$
5. $= \boxed{\sqrt{\frac{2H}{g}\frac{1+\sqrt{r}}{1-\sqrt{r}}}}$

Solución

1. $= \sqrt{\frac{2H}{g}}\,[1 + 2\sqrt{r}(1 + \sqrt{r} + \sqrt{r}^2 + \sqrt{r}^3 + \dots)]$
2. $(1 + \sqrt{r} + \sqrt{r}^2 + \sqrt{r}^3 + \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{r}^{n-1}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{r}^{n-1} = \frac{1}{1-\sqrt{r}}$
4. $= \sqrt{\frac{2H}{g}}\,[1 + 2\sqrt{r}(\frac{1}{1-\sqrt{r}})]$
5. $= \boxed{\sqrt{\frac{2H}{g}\frac{1+\sqrt{r}}{1-\sqrt{r}}}}$

Solución

1. $= \sqrt{\dfrac{2H}{g}}\ [1 + 2\sqrt{r}(1 + \sqrt{r} + \sqrt{r}^2 + \sqrt{r}^3 + \ldots)]$
2. $(1 + \sqrt{r} + \sqrt{r}^2 + \sqrt{r}^3 + \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{r}^{n-1}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{r}^{n-1} = \dfrac{1}{1 - \sqrt{r}}$
4. $= \sqrt{\dfrac{2H}{g}}\ [1 + 2\sqrt{r}(\dfrac{1}{1 - \sqrt{r}})]$
5. $= \boxed{\sqrt{\dfrac{2H}{g}} \dfrac{1 + \sqrt{r}}{1 - \sqrt{r}}}$

Solución

1. $= \sqrt{\frac{2H}{g}}\,[1 + 2\sqrt{r}(1 + \sqrt{r} + \sqrt{r}^2 + \sqrt{r}^3 + \ldots)]$
2. $(1 + \sqrt{r} + \sqrt{r}^2 + \sqrt{r}^3 + \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{r}^{n-1}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{r}^{n-1} = \frac{1}{1 - \sqrt{r}}$
4. $= \sqrt{\frac{2H}{g}}\,[1 + 2\sqrt{r}(\frac{1}{1 - \sqrt{r}})]$
5. $= \boxed{\sqrt{\frac{2H}{g}\frac{1 + \sqrt{r}}{1 - \sqrt{r}}}}$

Reto

Suponga que cada vez que la pelota golpea la superficie con velocidad v rebota con velocidad -kv, donde $0 < k < 1$. ¿Cuánto tiempo le tomará a la pelota llegar al reposo?

Sucesión de Fibonacci

Definición

Los números de Fibonacci quedan definidos por las ecuaciones:

$$f_0 = 0$$

$$f_1 = 1$$

$$f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$$

Un robot es programado para realizar una prueba experimental con algunos resistores. Conecta dos puntos A y B con una resistencia $R_1 = 1{,}600\Omega$. Los encargados del robot pensaron que era demasiado, entonces dieron la orden para que agregará otra resistencia con la misma resistencia R_2 entre estos puntos, paralela a la primera. Sin embargo, todavía no estaban satisfecho, por lo que agregaron una tercera resistencia $R_3 = R_1 + R_2 = 3{,}200\Omega$, paralela a las otras. Luego los encargados del robot pierden el control y este comenzó agregar más y más resistencias paralelas a las anteriores, con resistencias R_4, R_5. ... descritas por la formula $R_n = R_{n-2} + R_{n-1}$, donde n $\in$ N. ¿Cuál es la resistencia final entre los puntos A y B?

Solución

Denotemos el elemento n-ésimo de la secuencia de Fibonacci por F_n, donde $F_1 = 1$ y $F_2 = 1$, por lo tanto, $R_n = F_n R_1$. Todas las resistencias están conectadas en paralelo, lo que significa que la resistencia total R satisface:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{R_n} = \frac{1}{R_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n}$$

La secuencia de Fibonacci aumenta aproximadamente como una curva exponencial, por lo que no sorprende que la suma de sus valores recíprocos converja.

Solución

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n} \approx 3.359886$$

Ahora podemos ver fácilmente que la resistencia total es $\boldsymbol{R} = 0.4762\Omega$